Devoir libre $n^\circ 7$

à rendre le 27/11/2023

Soit E un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$ et u un endomorphisme de E. Un sous-espace vectoriel F de E est dit cyclique, s'il existe $a \in E$, $\lambda \in \mathbb{C}$ et un entier naturel non nul m tels que

$$F = \operatorname{Vect}\left(a, (u - \lambda \operatorname{id}_E)(a), \dots, (u - \lambda \operatorname{id}_E)^{m-1}(a)\right)$$

avec $(u - \lambda \operatorname{id}_E)^{m-1}(a) \neq 0$ et $(u - \lambda \operatorname{id}_E)^m(a) = 0$.

1. Montrer que, pour un tel sous-espace F, on a $u(F) \subset F$ et $\dim F = m$.

Le but de ce qui suit est de donner une démonstration du théorème de Jordan, qui s'énonce ainsi :
Soit E un espace vectoriel non nul de dimension finie sur $\mathbb{C}$, et soit u un endomorphisme de E. Alors E est la somme directe d'une famille de sous-espace cycliques.

2. Démontrer le théorème si $\dim E = 1$.

3. On suppose d'abord que u n'est pas inversible.

a. Supposons le théorème vrai pour tout espace vectoriel de dimension $n-1$ et soit E un espace vectoriel tel que $\dim E = n$. Soit F un sous-espace vectoriel de E de dimension $n-1$ tel que $u(E) \subset F$. Montrer que F est une somme directe de sous-espaces cycliques

$$M_j = \operatorname{Vect}\left(a_j, (u - \lambda_j \operatorname{id}_E)(a_j), \dots, (u - \lambda_j \operatorname{id}_E)^{m_j - 1}(a_j)\right), \ \ 1 \leq j \leq k$$

tels que $\dim M_j \leq \dim M_{j+1}$ pour $1 \leq j \leq k-1$.

b. Soit $S = \{\, j \in [\![1, k]\!] \mid \lambda_j = 0 \,\}$ et soit $y \notin F$. Montrer que

i) Si S est non vide, il existe des scalaires $(\alpha_j)_{j \in S}$ tels que $u(y) - \displaystyle\sum_{j \in S} \alpha_j u_j \in u(F)$.

ii) Si S est vide, $u(y) \in u(F)$.

c. Montrer que, si $z \in F$ est tel que $u(y) = u(z)$, alors $E = F \oplus \operatorname{Vect}(y - z)$ et le théorème est démontré

d. On suppose qu'il existe $z \in F$ tel que $u(y) = \displaystyle\sum_{j \in S} \alpha_j a_j + u(z)$ et $\displaystyle\sum_{j \in S} \alpha_j a_j \neq 0$.

Soit p le plus grand des éléments $j \in S$ tels que $\alpha_j \neq 0$ et soit $t = \dfrac{1}{\alpha_p}(y - z)$ et $H = \displaystyle\bigoplus_{j \in S, j \leq p-1} M_j$. Montrer que $u(H) \subset H$, $u^{m_p}(H) = \{0\}$ et $H \oplus M_p = H \oplus \operatorname{Vect}(u(t), u^2(t), \dots, u^{m_p}(t)$.

e. Déduire de **d.** que $E = \bigoplus_{j \neq p} M_j \oplus \mathrm{Vect}(t, u(t), u^2(t), ..., u^{m_p}(t))$ et qu'on a le théorème pour $\dim E = n$.

4. Si maintenant u est un endomorphisme quelconque de E, montrer qu'on peut se ramener au cas précédent, c'est-à-dire u non inversible.

5. Décomposer l'espace vectoriel $\mathbb{C}^5$ en sous-espaces cycliques de l'endomorphisme u dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

en utilisant les éléments de la base canonique.

Fin de l'épreuve