

DEVOIR LIBRE $n^{\circ}9$

à rendre le 18/12/2023

À toute suite complexe $a = (a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on associe la suite $a^* = (a_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n^* = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^n \mathbb{C}_n^k a_k$$

L'objet de problème est de comparer les propriétés de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^*$ aux propriétés de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$.

Partie I : deux exemples

1. Cas d'une suite constante.

Soit $\alpha \in \mathbb{C}^*$; on suppose que la suite a est définie par $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = \alpha$.

1a. Expliciter $\sum_{k=0}^n \mathbb{C}_n^k$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1b. Expliciter a_n^* pour $n \in \mathbb{N}$.

1c. La série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ (resp. $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^*$) est-elle convergente ?

2. Cas d'une suite géométrique.

Soit $z \in \mathbb{C}$; on suppose que la suite a est définie par : $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = z^n$.

2a. Exprimer a_n^* en fonction de z et n .

2b. On suppose que $|z| < 1$.

i) Justifier la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ et expliciter sa somme $A(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

ii) Justifier la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^*$ et expliciter sa somme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^*$ en fonction de $A(z)$.

2c. On suppose que $|z| \geq 1$.

i) Quelle est la nature (convergente ou divergente) de la série $\sum_{n \geq 0} a_n$?

ii) Quelle est la nature de $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^*$ si $z = -2$?

iii) On suppose $z = e^{i\theta}$, avec θ réel tel que $0 < |\theta| < \pi$.

Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^*$ est convergente. Calculer la partie réelle et la partie imaginaire de la somme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^*$.

Partie II : Étude du procédé de sommation

Dans cette partie, et pour simplifier, on suppose que a est à valeurs réelles.

1. Comparaison des convergences des deux suites.

1a. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on considère une entier k fixé, $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

i) Préciser un équivalent de $\mathbb{C}_n^k$ lorsque n tend vers $+\infty$.

ii) En déduire la limite de $\frac{1}{2^n} \mathbb{C}_n^k$ lorsque n tend vers $+\infty$.

1b. Soit a une suite réelle et q un entier naturel fixé.

On considère pour $n > q$ la somme $S_q(n, a) = \sum_{k=0}^q \mathbb{C}_n^k \frac{a_k}{2^n}$. Quelle est la limite de $S_q(n, a)$ lorsque l'entier n tend vers $+\infty$?

1c. On suppose que a_n tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$. Montrer que a_n^* tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

1d. On suppose que a_n tend vers l (limite finie) lorsque n tend vers $+\infty$. Quelle est la limite de a_n^* lorsque n tend vers $+\infty$?

1e. La convergence de la suite (a_n) est-elle équivalente à la convergence de la suite (a_n^*) ?

2. Comparaison des convergences des séries $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ et $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^*$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note $S_n = \sum_{k=0}^n a_k$, $T_n = \sum_{k=0}^n a_k^*$, $U_n = 2^n T_n$.

2a. Pour $n \in \llbracket 0, 3 \rrbracket$, exprimer U_n comme combinaison linéaire des sommes S_k , c'est à dire sous la forme $U_n = \sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} S_k$.

2b. On se propose de déterminer l'expression explicite de U_n comme combinaison linéaire des sommes S_k pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

$$(\mathcal{E}) \quad U_n = \sum_{k=0}^n \lambda_{n,k} S_k \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}$$

i) À quelle expression des coefficients $\lambda_{n,k}$ (en fonction de n et k) peut-on s'attendre compte-tenu des résultats obtenus à la question **2a.**?

ii) Établir la formule $(\mathcal{E})$ par récurrence sur l'entier n (on pourra remarquer que pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $a_k = S_k - S_{k-1}$ avec la convention $S_{-1} = 0$).

2c. On suppose que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ est convergente. Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^*$ est convergente et exprimer la somme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^*$ en fonction de la somme $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

2d. La convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ est-elle équivalente à la convergence de la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n^*$?

FIN DE L'ÉPREUVE