

DEVOIR LIBRE n°10

à rendre le 02/01/2024

Notations : Étant donné un intervalle I de $\mathbb{R}$, une application g de I dans $\mathbb{R}$ et un entier $k > 0$, on dit g est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I lorsque g est k fois dérivable sur I et que la dérivée k -ème de g est continue sur I .

1. **1a.** Montrer que, pour tout $x \in]0, \pi[$ et tout $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} = 1 + 2 \cos 2x + \dots + 2 \cos 2nx = 1 + 2 \sum_{k=1}^n \cos 2kx.$$

- 1b.** En déduire la valeur de :

$$\int_0^\pi \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx.$$

- 1c.** Montrer que, pour tout entier $n > 0$,

$$\int_0^\pi \frac{x^2 \sin(2n+1)x}{\sin x} dx = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2}.$$

2. Démontrer, en effectuant une intégration par partie sur un intervalle fermé borné, que l'intégrale impropre :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

est convergente.

Dans la suite on notera : $W = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$. On n'essayera pas, dans cette question, de calculer W .

3. **3a.** Soient b un réel positif et f une application de $[0, b]$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, b]$. Pour tout entier n , on pose :

$$I_n = \int_0^b f(x) \sin nx dx.$$

Montrer que la suite $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0.

3b. On considère une application g de $[0, b]$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, b]$, et on définit l'application f sur $[0, b]$ en posant :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{g(x) - g(0)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ g'(0) & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, b]$.

3c. On suppose toujours que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, b]$ et on rappelle que

$$W = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx.$$

Pour tout entier n , on pose :

$$K_n = \int_0^b g(x) \frac{\sin nx}{x} dx$$

Montrer que la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $W.g(0)$.

4. Dans toute cette question, h est une application de $[0, \pi]$ dans $\mathbb{R}$, de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, \pi]$.

4a. Montrer que :

$$\int_0^\pi h(x) \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (h(x) + h(\pi-x)) \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx.$$

4b. On définit la fonction g sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ en posant :

$$g(x) = \begin{cases} (h(x) + h(\pi-x)) \frac{x}{\sin x} & \text{si } x \neq 0 \\ h(0) + h(\pi) & \text{si } x = 0 \end{cases}.$$

Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

4c. Pour tout entier n , on pose :

$$L_n = \int_0^\pi h(x) \frac{\sin(2n+1)x}{\sin x} dx.$$

Montrer que la suite $(L_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $W.(h(0) + h(\pi))$.

5. 5a. En déduire la valeur de W .

5b. En déduire la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

5c. Calculer

$$\int_0^\pi x^4 \cos 2kx dx,$$

où k est un entier et en déduire la somme de la série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$.

FIN DE L'ÉPREUVE