MP – CPGE Mohammed VI-Kénitra

Année scolaire 23/24

Devoir libre $n^\circ 11$

à rendre le 19/01/2024

---

1. Soit F la fonction de la variable définie par :

$$F(x) = \frac{1}{(1-x)^2} + \frac{1}{x^2} - \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)}.$$

1*a*. Déterminer le domaine de définition de F.

1*b*. Montrer que la restriction de F sur $]0,1[$ est prolongeable par continuité sur $[0,1]$. On note $\tilde{F}$ la fonction ainsi prolongée. Déterminer $\tilde{F}(0)$.

1*c*. Montrer que pour tout $x \in [0,1]$:

$$\tilde{F}\left(\frac{x}{2}\right) + \tilde{F}\left(\frac{x+1}{2}\right) - 4\tilde{F}(x) = \frac{a}{(x+1)^2} + \frac{b}{(x-2)^2}$$

avec a et b des constantes à déterminer.

2. Soient $(f_n)_{n\geq 2}$ et $(g_n)_{n\geq 1}$ les deux suites de fonctions définies sur $[0,1]$ par $f_n(x) = \dfrac{1}{(n-x)^2}$ et $g_n(x) = \dfrac{1}{(n+x)^2}$.

2*a*. Montrer que les séries de fonctions $\sum\limits_{n\geq 2} f_n$ et $\sum\limits_{n\geq 1} g_n$ sont uniformément convergentes sur $[0,1]$. On pose alors

$$\forall x \in [0,1],\ \tilde{H}(x) = \sum_{n=2}^{\infty} f_n(x) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(x).$$

2*b*. Montrer que $\tilde{H}$ est continue sur $[0,1]$ et qu'il existe des réels c et d à déterminer vérifiant :

$$\tilde{H}\left(\frac{x}{2}\right) + \tilde{H}\left(\frac{x+1}{2}\right) - 4\tilde{H}(x) = \frac{c}{(x+1)^2} + \frac{d}{(x-2)^2}.$$

3. Pour $x \in [0,1]$, on pose $G(x) = \tilde{F}(x) + \tilde{H}(x)$.

3*a*. Montrer que G est continue sur $[0,1]$ et que

$$\forall x \in [0,1],\quad G\left(\frac{x}{2}\right) + G\left(\frac{x+1}{2}\right) = 4G(x).$$

3*b*. On pose $M = \sup_{x\in[0,1]} |G(x)|$. Montrer que $M = 0$.

3*c*. En déduire que

$$\forall x \in]0,1[,\quad \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi x)} = \frac{1}{x^2} + 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2 + x^2}{(n^2 - x^2)^2}$$

Quelle est la valeur de $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

Fin de l'épreuve