

DEVOIR LIBRE $n^{\circ}12$

à rendre le 9/02/2024

Une base de $\mathbb{R}^n$ étant fixée, on considère l'espace vectoriel $\mathcal{L}$ des matrices carrées (n, n) à coefficients réels représentant les endomorphismes de $\mathbb{R}^n$.

On distingue dans $\mathcal{L}$ les deux matrices suivantes :

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

de termes respectifs $s_{ij} = 1$ si et seulement si $j = i - 1$ et $t_{ij} = 1$ si et seulement si $j = i - 1$ ou $i = 1$ et $j = n$.

Première partie

1. Écrire les transformés par S et T d'un vecteur $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.
Pour p entier positif, calculer S^p et T^p .
2. Montrer que T^p est orthogonale.
Calculer S^n , T^n et vérifier que $T^p = S^p + {}^t(S^{n-p})$.
3. Soit $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ les sous-espaces vectoriels de engendrés respectivement par $I_n, S, S^2, \dots, S^p, \dots$ et $I_n, T, T^2, \dots, T^p, \dots$. Quelles sont leurs dimensions ? Quelle est leur intersection ?
4. La matrice S^p est-elle inversible ? Est-elle diagonalisable ?

Deuxième partie

Si $A, B \in \mathcal{L}$, on définit $(A|B) = \frac{1}{n} \text{Tr}(A^t B)$.

1. Montrer que $(A, B) \mapsto (A|B)$ est une forme bilinéaire symétrique définie positive.
2. Calculer $(S^p|S^q)$ et notamment $(S^p|S^p) = \|S^p\|^2$ et en déduire une base orthonormée du sous-espace $\mathcal{S}$.
3. Montrer que les éléments $T^p, 0 \leq p \leq n-1$, constituent une base orthonormée du sous-espace $\mathcal{T}$.
4. Exprimer le produit scalaire $(S^p|T^q)$ en fonction des produits scalaires $(S^i|S^j)$.
En déduire que $T^p - S^p$ est orthogonale à tout élément σ de $\mathcal{S}$.
Existe-t-il un élément $\sigma^{**} \in \mathcal{S}$ autre que S^p ayant la propriété de rendre $T^p - \sigma^{**}$ orthogonale à tout $\sigma \in \mathcal{S}$?

5. Montrer que si $\tau^* \in \mathcal{T}$, il existe un seul élément $\sigma^* \in \mathcal{S}$ tel que $\tau^* - \sigma^*$ soit orthogonale au sous-espace $\mathcal{S}$.

Montrer au moyen de l'inégalité de Schwartz que $\frac{(\sigma|\tau^*)}{\|\sigma\| \cdot \|\tau^*\|}$ est maximum pour $\sigma = \sigma^*$.

Troisième Partie

1. Montrer que pour p et q entiers quelconques $\|S^p T^q\| = \|T^q S^p\|$, la valeur étant indépendante de q .
2. Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des produits à gauche des éléments σ de $\mathcal{S}$ par T :

$$\mathcal{E} = \{ e = \sigma T \mid \sigma \in \mathcal{S} \}.$$

Choisir une base de ce sous-ensemble $\mathcal{E}$ de $\mathcal{L}$ et en déduire que $\sigma T = 0$ si et seulement si $\sigma = 0$.

3. Si $e \in \mathcal{E}$, déterminer $\tau \in \mathcal{T}$ tel que $e - \tau$ soit orthogonal à tout élément de $\mathcal{T}$.

FIN DE L'ÉPREUVE