MP – CPGE Mohammed VI-Kénitra

Année scolaire 24/25

Devoir libre $n°1$

à rendre le 18/09/2025

Exercice 1

Soit P un polynôme de $\mathbb{C}[X]$. Alors les racines du polynôme dérivé P' sont situées dans l'enveloppe convexe des racines de P. Cela signifie que les racines de P' sont à l'intérieur du polygone délimité par les racines de P. On peut encore traduire cette propriété mathématiquement en disant que les racines de P' peuvent s'écrire comme barycentres des racines de P : si $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ sont les racines de P, alors toute racine μ de P' peut s'écrire $\mu = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \alpha_i$ où pour tout i, $\lambda_i \in [0,1]$ et $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$.

1. Vérifier le théorème sur les polynômes suivants : X^4+3X^2-4, X^3-X^2+X-1, aX^2+bX+c (avec a,b,c dans $\mathbb{C}$), X^k-1 (avec $k \geq 2$).
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ un polynôme de degré au moins 2. On considère sa décomposition $P = a\displaystyle\prod_{'i=1}^{k}(X-\alpha_i)^{n_i}$ où $a \in \mathbb{C}$ et les α_i sont les racines de P et les n_i leurs multiplicités.

2. Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $P(z) \neq 0$. Montrer que

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{z-\alpha_i}.$$

3. Montrer que si z est de plus une racine de P', alors

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{|z-\alpha_i|^2}\right) z = \sum_{i=1}^{k} \frac{n_i}{|z-\alpha_i|^2}\alpha_i$$

4. En déduire que z est un barycentre des α_i. Conclure.

Exercice 2

Soit p un nombre premier impair. Notons C l'ensemble des carrés du groupe $((\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}})^*, \times)$:

$$C = \left\{ y \in (\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}})^* \,|\exists x \in (\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}})^* \; y = x^2 \right\}.$$

1. Déterminer C pour $p = 3, 5, 7, 11$.

2. Montrer que C est un sous-groupe de $(\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}})^*$.

3. Soit $\begin{array}{llll} f: & (\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}})^* & \to & C \\ & x & \mapsto & x^2 \end{array}$ Montrer que f est un morphisme de groupes.

4. Montrer que $f(x) = f(y)$ si et seulement si $y = x$ ou $y = -x$.

5. En déduire qu'il y a exactement $\dfrac{p-1}{2}$ carrés dans $(\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}})^*$.

Exercice 3

1. Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme de degré n à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Montrer que si P admet une racine rationnelle $\dfrac{p}{q}$ où p et q sont des entiers premiers entre eux, alors p/a_0 et q/a_n.

2. Les polynômes suivants ont-ils des racines dans $\mathbb{Q}$?

$$X^5 - X^2 + 1, \;\; 2X^4 - X^3 + X^2 - X + 2, \;\; X^3 - 6X^2 - 4X - 21.$$

Exercice 4

Soit p un nombre premier. Montrer que le groupe des éléments inversibles de l'anneau $(\mathbb{Z}/_{p\mathbb{Z}}, +, .)$ est un groupe cyclique.

Fin de l'épreuve