MP – CPGE Mohammed VI-Kénitra

Année scolaire 24/25

Devoir libre $n^\circ 2$

à rendre le 30/09/2025

Exercice 1

Pour tout $x \in \mathbb{Z}$, on appelle classe de x, notée $\overline{x}$, l'ensemble des entiers congrus à x modulo 7.
On appelle $\mathbb{Z}/_{7\mathbb{Z}}$ l'ensemble des classe d'équivalence modulo 7 et $(\mathbb{Z}/_{7\mathbb{Z}})^*$ l'ensemble des classes d'équivalence modulo 7 différentes de $\overline{0}$.
On appelle groupe engendré $\overline{x}$ par l'ensemble des puissances de $\overline{x}$, c'est-à-dire $\left\{ \overline{x}^k \;\middle|\; k \in \mathbb{Z} \right\}$.
On appelle $\mathbf{U}_6 = \{ z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1 \}$ l'ensemble des racines sixième de l'unité.

1. **1*a.*** Calculer $\overline{3}^k$ pour $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

1*b.* Déterminer $\overline{3}^k$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. On pourra utiliser la division euclidienne de k par 6.

2. Pour quelle raison $((\mathbb{Z}/_{7\mathbb{Z}})^*, .)$ est-il un groupe ?

3. Montrer que le groupe engendré par $\overline{3}$ est égal à $(\mathbb{Z}/_{7\mathbb{Z}})^*$.

4. Soit φ définie pour tout par

$$\varphi\left(\overline{3}^k\right) = e^{\frac{ik\pi}{3}}.$$

4*a.* Montrer φ que est bien définie.

4*b.* Montrer que φ est un morphisme de $((\mathbb{Z}/_{7\mathbb{Z}})^*, .)$ sur $(\mathbf{U}_6, .)$.

4*c.* Déterminer le noyau de φ et en déduire que φ est un isomorphisme (morphisme bijectif) de $((\mathbb{Z}/_{7\mathbb{Z}})^*, .)$ sur $(\mathbf{U}_6, .)$.

Exercice 2

Soient r et s les applications de $\mathbb{C}$ dans lui-même définies comme suit :

$$r : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & iz \end{array} \quad \text{et} \quad s : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \to & \mathbb{C} \\ z & \mapsto & \overline{z} \end{array}$$

Dans tout l'exercice, on identifiera l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, avec l'application du plan complexe dans lui-même, qui à un point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $f(z)$.

1. On note r_2 et r_3 les composées $r^2 = r \circ r$ et $r^3 = r \circ r \circ r$. Interpréter comme transformations géométriques du plan complexe les applications $r, r^2, r^3, s, s \circ r, s \circ r^2$ et $s \circ r^3$.

2. On note e l'application identité du plan complexe. Montrer que l'ensemble,

$$\{e, r, r^2, r^3, s, s \circ r, s \circ r^2, s \circ r^3\}$$

muni de la composition des applications est un groupe, dont on donnera la table de composition. Il sera noté G.

3. Montrer que $\{e, r^2\}$, $\{e, s\}$, $\{e, s \circ r\}$, $\{e, s \circ r^2\}$, $\{e, s \circ r^3\}$, sont des sous-groupes de G, tous isomorphes à $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$.

4. Montrer que $\{e, s, r^2, s \circ r^2\}$ est un sous-groupe de G, isomorphe à $\mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}} \times \mathbb{Z}/_{2\mathbb{Z}}$.

5. Montrer que $\{e, r, r^2, r^3\}$ est un sous-groupe de G, isomorphe à $\mathbb{Z}/_{4\mathbb{Z}}$.

6. On note :
A_1 le point du plan complexe d'affixe $1 + i$,
A_2 le point du plan complexe d'affixe $-1 + i$,
A_3 le point du plan complexe d'affixe $-1 - i$,
A_4 le point du plan complexe d'affixe $1 - i$.
Vérifier que chaque élément du groupe G laisse invariant l'ensemble $\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$.

7. Étant donné un élément f du groupe G, on lui associe la permutation $\varphi(f)$ de $\{1, 2, 3, 4\}$ définie par :

$$\forall i, j \in \{1, 2, 3, 4\},\ \varphi(f)(i) = (j) \Leftrightarrow f(A_i) = A_j.$$

On définit ainsi une application φ de G dans $\mathscr{S}_4$. Montrer que φ est un morphisme de groupes.

8. Écrire en extension l'image par φ de chacun des éléments de G.

9. Soit H l'image de G par φ. Montrer que H est un sous-groupe de $\mathscr{S}_4$, isomorphe à G.

Fin de l'épreuve