MP – CPGE Mohammed VI-Kénitra

Année scolaire 24/25

Devoir libre $n^\circ 3$

à rendre le 14/10/2024

Exercice 1

1. $s_1, s_2, ..., s_n$ sont n nombres complexes tels $s_i \neq s_j$ pour $i \neq j$. $u_1, u_2, ..., u_n$ sont n nombres complexes.

Démontrer que s'il existe un polynôme P une indéterminée, de degré au plus égal $n-1$ et vérifiant les égalités

$$P(s_1) = u_1, P(s_2) = u_2, ..., P(s_n) = u_n \tag{1}$$

alors ce polynôme est unique.

Considérant la décomposition en éléments simples de la fraction

$$R(z) = \frac{P(z)}{(z-s_1)(s-s_2)...(z-s_n)}, \tag{2}$$

établir l'existence de P et le déterminer en fonction de $s_1, s_2, ..., s_n$ et de $u_1, u_2, ..., u_n$.

Déterminer une condition sur les u_i et les s_i pour que le polynôme soit de degré effectif $n-1$.

2. $n_1, n_2, ..., n_k$ sont k entiers tels que $n_1 + n_2 + ... + n_k = n$. Soient n nombres complexes $u_i^0, u_i^1, ..., u_i^{n_i-1}$, où $i = 1, 2, ..., k$.

$s_1, s_2, ..., s_k$ sont k nombres complexes tels que $s_i \neq s_j$ pour $i \neq j$. Démontrer que s'il existe un polynôme P à une indéterminée, de degré au plus égal à $n-1$ et vérifiant, pour $i = 1, 2, ..., k$, les égalités

$$P(s_i) = u_i^0, P^{(1)}(s_i) = u_i^1, ..., P^{(n_i-1)}(s_i) = u_i^{n_i-1} \tag{3}$$

où $P^{(1)}, P^{(2)}, ..., P^{(n_i-1)}$ désignent les dérivées successives de P jusqu'à l'ordre $n_i - 1$, alors ce polynôme est unique.

3. On se place dans le cas particulier où $n_1 = 2, n_2 = 1$. s_1 étant différent de s_2, démontrer qu'il existe un polynôme P, du second degré au plus, vérifiant :

$$P(s_1) = u_i^0, P^{(1)}(s_1) = u_1^1, P(s_2) = u_2^0 \tag{4}$$

4. On se place à nouveau dans les hypothèses du **2.** On rappelle dans ces conditions, que si P existe, alors il existe également n constantes complexes A_j^r telles que :

$$\frac{P(z)}{(z-s_1)^{n_1}(z-s_2)^{n_2}...(z-z_k)^{n_k}} = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{r=1}^{n_j} \frac{A_j^r}{(z-s_j)^r} \right) \tag{5}$$

4*a*. Montrer qu'il existe n polynômes $Q_{j,r}$ à une indéterminée tels que

$$P(z) = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{r=1}^{n_j} A_j^r Q_{j,r}(z) \right). \tag{6}$$

4*b*. $Q_{j,r}^{(l)}$ désignant la dérivée d'ordre l de $Q_{j,r}$, on pose par convention $Q_{j,r}^{(0)} = Q_{j,r}$ et $P^{(0)} = P$.
Pour $0 \leq l \leq n_j - 1$, montrer que $Q_{j,n_j-l}^{(l)}(s_j) \neq 0$ et que

$$P^{(l)}(s_i) = A_i^{n_i} Q_{i,n_i}^{(l)}(s_i) + A_i^{n_i-1} Q_{i,n_i-1}^{(l)}(s_i) + \ldots + A_i^{n_i-l} Q_{i,n_i-l}^{(l)}(s_i) \tag{7}$$

En déduire qu'il existe bien un polynôme P de degré au plus égal à $n-1$ qui satisfait aux hypothèses du **2.**

Exercice 2

On note $\mathscr{S}$ l'espace vectoriel des suites de nombres réels. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ fixé. On note $\mathscr{S}_p = \{ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{S} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+p} = u_n \}$ (l'ensemble de suites de période p).
Montrer que $\mathscr{S}_p$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{S}$ et que $\dim_{\mathbb{R}} (\mathscr{S}_p) = p$

Fin de l'épreuve