MP – CPGE Mohammed VI-Kénitra

Année scolaire 24/25

Devoir libre $n^\circ 4$

à rendre le 28/10/2024

À tout vecteur $X = (x_1, ..., x_n)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{C}^n$, on associe la matrice $V(X)$ dont les coefficients $V(X)_{p,q}$, pour $1 \leq p \leq n$ et $1 \leq q \leq n$, sont définis par la relation :

$$V(X)_{p,q} = (x_p)^{q-1}.$$

On note $v(X) = \det(V(X))$. On munit $\mathbb{C}^n$ de la norme infini $\|.\|_\infty$, défini par :

$$\forall X = (x_1, x_2, ..., x_n), \ \ \|X\|_\infty = \sup_{i=1}^{n} |x_i|.$$

Le but du problème est de montrer qu'à cette application v de $\mathbb{C}^n$ dans $\mathbb{C}$ peut être associé un réel ρ tel que, pour tout vecteur X de $\mathbb{C}^n$,

$$|v(X)| \leq \rho(\|X\|_\infty)^{\frac{n(n-1)}{2}},$$

et d'étudier quelques propriétés de ρ.

1. Comparer, pour tout $X \in \mathbb{C}^n$ et $\lambda \in \mathbb{C}$, les deux expressions $v(\lambda X)$ et $v(X)$.

2. Soit $X \in \mathbb{C}^n$. Montrer qu'il existe un vecteur unitaire Y de $\mathbb{C}^n$ tel que $X = \|X\|_\infty Y$. Exprimer $v(X)$ en fonction de $v(Y)$ et de $\|X\|_\infty$.

3. Montrer que v est continue. En déduire que $X \mapsto |v(X)|$ admet un maximum sur la sphère unité

$$S_n = \left\{ X \in \mathbb{C}^n \mid \|X\|_\infty = 1 \right\}.$$

Soit ρ le maximum de la fonction $|v|$ sur la sphère unité, c'est-à-dire,

$$\rho = \max\left\{ \ | \ v(X)||X \in \mathbb{C}^n, \ \|X\|_\infty = 1 \right\}.$$

4. Montrer que pour tout vecteur X de $\mathbb{C}^n$,

$$|v(X)| \leq \rho(\|X\|_\infty)^{\frac{n(n-1)}{2}}.$$

5. **Cas** $n = 2$

5*a*. Caractériser les vecteurs qui appartiennent à $S_2 = \left\{ X \in \mathbb{C}^2 \ \middle| \ \|X\|_\infty = 1 \right\}$.

5*b*. Déterminer le maximum ρ de la fonction $X \mapsto |v(X)|$ sur la sphère unité.

5*c*. Démontrer que les vecteurs unitaires qui rendent maximum $|v(X)|$ sont proportionnels à un même vecteur X_1 dont la première coordonnée est égale à 1. Les déterminer.

6. Montrer que $\rho \leq 2^{\frac{n(n-1)}{2}}$.

7. **Une minoration du réel** ρ Soit Ω le vecteur unitaire dont les coordonnées w_p, pour $1 \leq p \leq n$, sont définies par la relation :

$$w_p = e^{\frac{2i(p-1)\pi}{n}}$$

7*a*. On note $\overline{V(\Omega)}$ la matrice complexe conjuguée de $V(\Omega)$. Démontrer que la matrice produit $V(\Omega)\overline{V(\Omega)}$ est une matrice proportionnelle à la matrice identité I_n.

7*b*. En déduire la valeur de $|v(\Omega)|$.

7*c*. En déduire une minoration du réel ρ.

Fin de l'épreuve