Devoir libre $n°5$

à rendre le 19/11/2024

On note $\mathbb{C}$ le corps des nombres complexes. On considère un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E, un entier $n \geq 2$, et une application linéaire $\sigma : E \to E$ telle que $\sigma^n = Id$. On note ζ la racine primitive n-ème de l'unité $\exp\left(\frac{2i\pi}{n}\right)$.

1. Soient i, j deux entiers compris entre 0 et $n-1$. Calculer la valeur de la somme $\sum_{k=0}^{n-1} \zeta^{ik}\zeta^{-jk}$.

2. On note A la matrice carrée de taille n dont le coefficient a_{ij} est égal à ζ^{-ij}, pour $0 \leq i \leq n-1$ et $0 \leq j \leq n-1$. Montrer que A est inversible en calculant son inverse.

3. Proposer une autre manière de montrer que A est inversible en utilisant un calcul de déterminant classique.

4. Pour $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$, on note $p_k = \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} \zeta^{-ik}\sigma^i$. Justifier que c'est une application linéaire de E dans E.

5. Soit E_k le sous-espace propre de σ relatif à la valeur propre ζ^k. Montrer que l'image de p_k est incluse dans E_k.

6. Soient k, l deux entiers compris entre 0 et $n-1$. Calculer $p_k \circ p_l$.

7. Montrer que $p_o + p_1 + ... + p_{n-1} = \mathbf{Id}_E$. En déduire que E est somme directe des sous-espaces propres E_k, puis que p_k est le projecteur sur E_k associé à la décomposition de E en sous-espaces propres.

8. Pour chaque k, on choisit des vecteurs $e_{k,i}$ formant une base de E_k, avec $i \in \{1, ..., \dim E_k\}$. La famille $\mathscr{B} = \{e_{k,i}\}_{k,i}$ avec k et i variables forme une base de E. On considère l'application σ^* définie sur E^* par :

$$\forall \varphi \in E^*, \quad \sigma^*(\varphi) = \varphi \circ \varphi.$$

8*a*. Montrer que σ^* est un endomorphisme de E^*.

8*b*. Rappeler la définition de la base duale $\mathscr{B}^* = \{e^*_{k,i}\}_{k,i}$ et montrer que $e^*_{k,i}$ est un vecteur propre pour σ^* relatif à la valeur propre ζ^k.

9. Montrer que les conditions suivantes sont équivalentes :

9*a*. $\dim_{\mathbb{C}}(E) = n$ et le polynôme minimal de σ est $X^n - 1$,

9*b*. les espaces propres E_k sont des droites.

10. On considère maintenant l'exemple où E est le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes à coefficients complexes de degré $\leq n-1$, et où σ est l'endomorphisme qui envoie un polynôme $P(X)$ sur le polynôme $P(\zeta X)$.
Vérifier que $\sigma^n = Id$, que le polynôme minimal de σ est $X^n - 1$, et trouver une base de vecteurs propres pour σ.

Fin de l'épreuve