MP – CPGE Mohammed VI-Kénitra

Année scolaire 24/25

# Devoir libre $n°6$

à rendre le 05/12/2024

## Problème 1

**Question préliminaire :** Soient $\alpha$ et $\beta$ deux réels strictement positifs. Vérifier que :

$$(1+\alpha)(1+\beta) \geq (1+\alpha+\beta).$$

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ deux suites de réels strictement positifs.

On pose $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 \\ u_1 & 1 \end{vmatrix}$, $\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 \\ 0 & u_2 & 1 \end{vmatrix}$ et, pour tout $n \geq 3$ :

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & -v_1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ u_1 & 1 & -v_2 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & u_2 & 1 & -v_3 & \ddots & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \cdots & \cdots & \ddots & \ddots & \ddots & -v_n \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & u_n & 1 \end{vmatrix}$$

et on note pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_n = u_n v_n$.

1. Calculer $\Delta_1$ et $\Delta_2$.
2. Démontrer que :
$$\forall n \geq 3, \quad \Delta_n = \Delta_{n-1} + a_n \Delta_{n-2}.$$
3. Prouver que la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.
4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que :
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Delta_n \leq \prod_{k=1}^{n} (1+a_k).$$
On pourra utiliser un raisonnement par récurrence sur l'entier naturel $n$.

5. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $P_n = \prod_{k=1}^{n}(1+a_k)$, $S_n = \sum_{k=1}^{n} \ln(1+a_k)$ et on suppose dans cette question que la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge.
   a) Prouver que la suite $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
   b) Que peut-on en déduire pour la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ?
6. On suppose maintenant que la suite $(\Delta_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge.
   a) Vérifier que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\Delta_n \geq 1$.
   b) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, on pose $t_n = \Delta_n - \Delta_{n-1}$. Etudier la nature de la série : $\sum_{n\geq 2} t_n$.
   c) Prouver alors que la série $\sum_{n\geq 1} a_n$ converge.
7. Quel résultat a-t-on finalement établi ?

# Problème 2

Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$, on pose, lorsque cela est possible,

$$\varphi(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} A^{2n+1} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} A^{2k+1}.$$

Pour tout $z \in \mathbb{C}$, on pose $s(z) = \frac{1}{2i}[\exp(iz) - \exp(-iz)]$ et $c(z) = \frac{1}{2i}[\exp(iz) + \exp(-iz)]$ où $i$ vérifie $i^2 = -1$.

**1.** a) Vérifier que pour tout $z \in \mathbb{C}$, on a : $s(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$.
   b) Déterminer une formule analogue pour $c(z)$, $z \in \mathbb{C}$.

**2.** Si $A = \gamma I_2$ avec $\gamma \in \mathbb{C}$, déterminer $\varphi(A)$.

**3. On suppose que $A$ possède deux valeurs propres distinctes $\alpha$ et $\beta$.**
   a) Justifier l'existence d'une matrice $P \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que : $D = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} = P^{-1}AP$.
   b) Déterminer $\varphi(D)$ puis $\varphi(A)$ à l'aide de la matrice $P$.

**4. On suppose que les valeurs propres de $A$ sont égales : $\beta = \alpha$.**
   a) Justifier l'existence d'une matrice $Q \in \mathbf{GL}_2(\mathbb{C})$ et d'un nombre complexe $y$ tels que $T = \begin{pmatrix} \alpha & y \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} = Q^{-1}AQ$.
   b) Calculer $T^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   c) En déduire $\varphi(A)$ à l'aide de la matrice $Q$.

**5.** Justifier l'existence de $\varphi(A)$ pour toute matrice $A$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.

**6.** Existe-t-il une matrice de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ telle que l'on ait : $\varphi(X) = \begin{pmatrix} 1 & 2024 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ?

FIN DE L'ÉPREUVE