MP – CPGE Mohammed VI-Kénitra

Année scolaire 24/25

Devoir libre $n°8$

à rendre le 30/01/2025

Partie I : Calcul de $\zeta(2)$

1. Démontrer pour tout réel x n'appartenant pas à $S = \{ k\pi \mid k \in \mathbb{Z} \}$ que $\dfrac{\sin(2n+1)x}{\sin^{2n+1} x}$ s'exprimer corne combinaison linéaire de puissances de $\cot x$.

2. Résoudre l'équation :

$$x \in \mathbb{R},\ \ \mathtt{C}^1_{2n+1} x^n - \mathtt{C}^3_{2n+1} x^{n-1} + \ldots + (-1)^k \mathtt{C}^{2k+1}_{2n+1} x^{n-k} + \ldots + (-1)^n = 0.$$

3. En utilisant les relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme calculer les deux sommes

$$\sum_{p=1}^{n} \cot^2 \frac{p\pi}{2n+1} \ \text{ et } \ \sum_{p=1}^{n} \frac{1}{\sin^2 \frac{p\pi}{2n+1}}$$

4. **4*a*.** Lorsque $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$, établir que $\sin x < x < \tan x$. En déduire un encadrement de $S_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p^2}$.

   4*b*. En déduire la valeur de $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ (on ne demande pas de prouver la convergence de cette série)

5. En déduire la valeur des sommes des séries suivantes $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$ et $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$.

Partie 2 : Application Soit la fonction g telle que :

$$g(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

1. Démontrer que g est prolongeable par continuité sur $]-1, +\infty[$. Soit h ce prolongement. Démontrer que h admet un développement en série entière sur un intervalle que l'on précisera. La fonction h est-elle de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$?

2. Démontrer que :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$

En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x$.

Partie 3 : Calcul des intégrales

1. Démontrer que les intégrales généralisées suivantes sont convergentes :

$$J = \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x, \quad K = \int_0^1 \frac{\ln x}{1-x}\mathrm{d}x, \quad L = \int_0^1 \frac{\ln x}{1+x}\mathrm{d}x.$$

2. Démontrer que $K + L = 2J$.
3. Démontrer que $K + 4L = 4J$ (on pourra, dans K, effectuer le changement de variable défini par $x = t^2$).
4. Exprimer L en fonction de :

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\mathrm{d}x.$$

(on pourra effectuer une intégration par parties).
En déduire les valeurs de J, K et L.

5. Pour chacune des intégrales suivantes, dire si elle converge et, dans ce cas, calculer sa valeur :

$$\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x, \quad \int_0^1 \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}, \quad \int_1^{+\infty} \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

Fin de l'épreuve