Devoir libre $n°9$

à rendre le 17/02/2025

Le but de ce problème est de définir et d'étudier, de différentes manières, la constante γ d'Euler. Les cinq parties proposées sont, dans une large mesure, indépendantes les unes des autres.

Partie : I

On définit une application f de $]0,+\infty[$ dans $\mathbb{R}$ par $f(n)=e^{-x}\ln(x)$ ($\ln$ désigne le logarithme népérien).

1.1 Montrer que f est indéfiniment dérivable. Étudier le signe de $g(x)=e^{x}f''(x)$. Dresser le tableau de variation de f. On notera x_1 et x_2 les réels tels que $f'(x_1)=0$ et $f''(x_2)=0$.

1.2 Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de x_1 et $f(x_2)=0$, en indiquant la méthode et le moyen de calcul utilisés.

1.3 Tracer la représentation graphique de f.

Partie : II

On définit deux suites $(u_n)_{n\geq 1}$, et $(v_n)_{n\geq 1}$ par :

$$u_n=-\ln(n)+\sum_{p=1}^{n}\frac{1}{p} \text{ et } v_n=u_{n+1}-u_n.$$

2.1 Donner un équivalent simple de v_n, pour n infini, et prouver que la série $\sum_{n\geq 1} v_n$ converge, en déduire que la suite $(u_n)_{n\geq 1}$ converge aussi. On notera γ la limite de la suite $(u_n)_{n\geq 1}$.

2.2 Prouver que :

$$\forall p\in\mathbb{N},\ p\geq 2,\ \int_{p}^{p+1}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}\leq\frac{1}{p^2}\leq\int_{p-1}^{p}\frac{\mathrm{d}t}{t^2}.$$

2.3 En déduire que :

$$\sum_{p=n}^{+\infty}\frac{1}{p^2}\underset{n\to+\infty}{\sim}\frac{1}{n}.$$

2.4 Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites de réels strictement positifs tel que :

$$\bullet\ a_n \underset{n\to+\infty}{\sim} b_n, \tag{1}$$

$$\bullet \text{ la série } \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n\ n\text{diverge}. \tag{2}$$

Démontrer que :

$$\sum_{p=n}^{+\infty} a_p \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{p=n}^{+\infty} b_p.$$

(On pourra poser $b_p = a_p(1+\varepsilon_p)$ avec $\lim\limits_{p\to+\infty} \varepsilon_p = 0$ et prouver que :

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\frac{\left(\sum\limits_{p=n}^{+\infty} a_p x_p\right)}{\left(\sum\limits_{p=n}^{+\infty} a_p\right)} \right] = 0.\ )$$

2.5 Déduire des questions précédentes que : $u_n - \gamma \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n}$.

2.6 On définit deux suites $(x_n)_{n\geq 2}$ et $(y_n)_{n\geq 2}$ par :

$$x_n = -\ln(n) + \frac{1}{2n} + \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} \text{ et } y_n = x_{n+1} - x_n.$$

En s'inspirant du raisonnement utilisé pour les suites $(u_n)_{n\geq 1}$ et $(v_n)_{n\geq 1}$, trouver un équivalent de $x_n - \gamma$ pour n infini.

Pour n entier supérieur ou égal à 2, on pose :

$$z_n = \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p} - \ln(n) - \frac{1}{2n} + \frac{1}{12n^2}.$$

Prouver que $\gamma = z_n + \dfrac{\alpha_n}{n^2}$ avec $\lim\limits_{n\to+\infty} \alpha_n = 0$.

2.7 Calculer à 10^{-5} près une valeur approchée de z_6.

Partie : III

On pose : $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$, $J = \displaystyle\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$, $K = \displaystyle\int_1^{+\infty} f(t)\mathrm{d}t$, f étant définie en partie 1.

3.1 Justifier l'existence de J.

3.2 Par une intégration par parties, montrer que $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^{-t}-1}{t}\mathrm{d}t$.

3.3 Justifier l'existence de K.

3.4 Par une intégration par parties, montrer que $K = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} \mathrm{d}t$.

3.5 Justifier l'existence de I et la relation $I = J + K$.

Partie : IV

4.1 Prouver que : $\forall x > -1, \ln(1+x) \leq x$.

4.2 En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \leq n, \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}$.

4.3 Prouver que $\forall x \in \left[-\dfrac{1}{2}, 0\right], x - x^2 \leq \ln(1+x)$.

4.4 En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \left[0, \dfrac{n}{2}\right], e^{-t-\frac{t^2}{n}} \leq \left(1 - \dfrac{t}{n}\right)^n$.

4.5 Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in \mathbb{R}, 1 - \dfrac{t^2}{n} \leq e^{-\frac{t^2}{n}}$. En déduire que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 4,\ \forall t \in \left[0, \sqrt{n}\right],\ e^{-t}\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n.$$

4.6 Prouver que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq 4,\ \forall t \in [0, n],\ e^{-t}\left(1 - \frac{t^2}{n}\right) \leq \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \leq e^{-t}.$$

Partie : V

Pour tout entier naturel n non nul, on pose :

$$J_n = \int_0^1 \frac{\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n - 1}{t} \mathrm{d}t \text{ et } K_n = \int_0^n \frac{\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{t} \mathrm{d}t.$$

5.1 Justifier l'existence de J_n et de K_n.

5.2 Montrer que :

$$J_n = \int_0^n \frac{\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n - 1}{t} \mathrm{d}t - \int_1^n \frac{\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n}{t} \mathrm{d}t + \int_1^n \frac{1}{t} \mathrm{d}t.$$

5.3 Prouver que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ \forall u \in \mathbb{R}^*,\ \frac{(1-u)^n - 1}{u} = -\sum_{p=0}^{n-1} (1-u)^p.$$

5.4 Montrer que : $J_n + K_n = \ln(n) - \displaystyle\sum_{p=1}^{n} \frac{1}{p} = -u_n$.

(u_n est défini en partie 2).

CPGE Mohamed VI-Kénitra

Partie : VI

6.1 Démontrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4, 0 \leq J - J_n \leq \frac{1}{n}\int_0^1 te^{-t}\mathrm{d}t, \text{ et que : } \lim_{n\to+\infty} J_n = J.$$

6.2 Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 4, \int_1^n \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t - \frac{1}{n}\int_1^n te^{-t}\mathrm{d}t \leq K_n \leq \int_1^n \frac{e^{-t}}{t}\mathrm{d}t.$$

En déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} K_n = K$.

6.3 Déduire des questions et parties précédentes que :

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}\ln(t)\mathrm{d}t = -\gamma.$$

6.4 Calculer :

$$\int_0^1 \frac{1 - e^{-t} - e^{-\frac{1}{t}}}{t}\mathrm{d}t.$$

Fin de l'épreuve