Devoir libre $n°$2

à rendre le 24/10/11

○●○●○●○

Exercice 1 Soit E un espace de Banach. Notons I l'application identique de E et $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.

1. Soit $v \in \mathscr{L}(E)$ tel que $\|v\| < 1$. Montrer que $I + v$ est inversible et
$$\|(I+v)^{-1} - I\| \leq \frac{\|v\|}{1 - \|v\|}$$
2. Montrer que l'ensemble $\mathfrak{J}$ des automorphismes de E est un ouvert de $\mathscr{L}(E)$ et que l'application $\varphi : v \longmapsto v^{-1}$ est continue sur $\mathfrak{J}$
3. Montrer que φ est différentiable sur $\mathfrak{J}$ et que si $u \in \mathfrak{J}$ et $v \in \mathscr{L}(E)$ on a
$$d\varphi_u(v) = -u^{-1} \circ v \circ u^{-1}.$$

Exercice 2 Soit $G : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$. On considère le changement de variable h qui est l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ définie par :
$$(u,v) \longmapsto h(u,v) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right),$$
et l'on pose $g = G \circ h$.

1. Calculer les dérivées partielles d'ordre un de g en fonction de celles de G et vice-versa.
2. Déterminer à l'aide du calcul précédent toutes les fonctions G qui vérifient :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial G}{\partial x}(x,y) + 4xG(x,y) = \frac{\partial G}{\partial y}(x,y) + 4yG(x,y).$$
3. (a) Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. En utilisant toujours le changement de variable h, déterminer sous forme d'intégrales les fonctions G qui vérifient
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial G}{\partial x}(x,y) - \frac{\partial G}{\partial y}(x,y) + 4(x-y)G(x,y) = \phi(x,y).$$
   (b) Montrer qu'il existe une et une seule solution de cette équation telle que $G(x,0) = 0$ pour tout réel x et écrire cette solution sous forme d'une intégrale.

Exercice 3 On considère g définie sur $\mathbb{R}^2$ par :
$$g(x,y) = (x^2 - 1)\arctan(x^2 + y^2)$$

1. Montrer que g possède un maximum local.
2. Montrer que g possède deux autres points critiques qui ne sont pas des extremums locaux.
3. Établir une majoration sur $[-1,1] \times \mathbb{R}$ du type :
$$|g(x',y') - g(x,y)| \leq A|x'-x| + B|y'-y|$$
où A et B sont des constantes.
En déduire que g est uniformément cotinue sur $[-1,1] \times \mathbb{R}$

●●●●●●●●●●