Devoir libre $n°$3

à rendre le 14/11/11

○●○●○●○

Problème : Dans tout le problème, n est un entier strictement supérieur à 1 donné. On se donne n nombres réels strictement positifs $(\lambda_i)_{1\leq i\leq n}$ vérifiant $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ...\lambda_n$.

PREMIÈRE PARTIE

1. (a) En étudiant les nombres c_k définis par :

$$(1) \quad c_k = 1 - \frac{k}{\lambda_k} + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\lambda_j},$$

montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}$, $1 \leq r \leq n$ tel que :

– pour $1 \leq k \leq r$ on ait $\dfrac{1}{\lambda_k} < \dfrac{1}{k}\left(1 + \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\lambda_j}\right)$;

– pour les valeurs de k, s'il en existe, telles que $r < k \leq n$, on ait $\dfrac{1}{\lambda_k} \geq \dfrac{1}{k}\left(1 + \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\lambda_j}\right)$.

(b) Montrer que, si $r < n$, alors $\lambda_{r+1} < \lambda_r$.

2. Pour $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq k \leq n$, on pose :

$$(2) \quad M_k = \frac{1}{k^k}\left(1 + \sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\lambda_j}\right)^k \prod_{j=1}^{k} \lambda_j$$

On veut montrer que, pour $1 \leq k \leq r$, on a :

$$(3) \quad M_{k+1} > M_k.$$

(a) Montrer que pour tout $t > 0$, $t \neq \dfrac{1}{k}$, on a :

$$(1+t)^{k+1} > kt\left(1 + \frac{1}{k}\right)^{k+1}.$$

(b) Exprimer le rapport $\dfrac{M_{k+1}}{M_k}$ en fonction de k et de $x = \dfrac{1}{\lambda_{k+1}}\left(1 + \displaystyle\sum_{j=1}^{k} \frac{1}{\lambda_j}\right)^{-1}$.

Montrer que pour $1 \leq k < r$ on a : $0 < x < \dfrac{1}{k}$.

(c) En déduire l'inégalité (3) cherchée.

DEUXIÈME PARTIE

L'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ étant muni de sa base canonique, on désigne par p le point de coordonnées $(p_1, p_2, ..., p_n)$. Soit D et Δ les parties de $\mathbb{R}^n$ définies par :

$$D = \{p \in \mathbb{R}^n / p_i \geq 0, i = 1, ..., n \text{ et } \sum_{i=1}^{n} p_i \leq 1\}$$

et

$$\Delta = \{p \in \mathbb{R}^n / p \in D \quad \text{et} \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\}$$

Soit φ l'application de D dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\varphi(p) = \prod_{i=1}^{n} (1 + \lambda_i p_i)$$

On veut résoudre le problème :

$(\mathcal{P})$: **Trouver le maximum de φ sur D.**

1. Montrer que D est fermé borné dans $\mathbb{R}^n$ et que φ est continue sur D. En déduire qu'il existe $p^* \in D$ tel que $\varphi(p) \leq \varphi(p^*)$ pour tout $p \in D$.
2. Montrer que $p^* \in \Delta$.
3. On définit l'application $\psi : D \to \mathbb{R}$ par :

$$\psi(p) = -\ln[\varphi(p)]$$

   Montrer que ψ est strictement convexe sur D, c'est-à-dire :

$$\forall p_1 \in D, \forall p_2 \in D, p_1 \neq p_2, \forall \alpha \in]0,1[, \psi(\alpha p_1 + (1-\alpha) p_2) < \alpha \psi(p_1) + (1-\alpha)\psi(p_2).$$

   (on pourra utiliser la convexité stricte de la fonction : $x \longmapsto -\ln(1 + \lambda x)$ pour $x > 0$ et $\lambda > 0$)
4. En déduire que ψ est strictement convexe sur Δ, puis montrer l'unicité de p^* dont on désignera dans suite les coordonnées par $p_1^*, p_2^*, ..., p_n^*$.
5. (a) Pour $1 \leq i < j \leq n$, montrer que, si $\lambda_i = \lambda_j$, alors $p_i^* = p_j^*$, et que, si $\lambda_i > \lambda_j$, alors $p_i^* \geq p_j^*$.

   (b) Soit k le plus grand entier tel que $p_k^* > 0$, de telle sorte que $p_1^* \geq p_2^* \geq ... \geq p_k^*$ et $p_{k+1}^* = ... = p_n^* = 0$.
   Montrer que les nombres p_i^* ($i = 1, ..., k$) sont déterminés par le système :

$$(4) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \theta}{\partial p_1}(p_1^*, ..., p_k^*) = \dfrac{\partial \theta}{\partial p_2}(p_1^*, ..., p_k^*) = ... = \dfrac{\partial \theta}{\partial p_k}(p_1^*, ..., p_k^*) \\ p_1^* + p_2^* + ... + p_k^* = 1 \end{cases}$$

   où l'on posé : $\theta(p_1, p_2, ..., p_k) = \psi(p_1, p_2, ..., p_k, 0, ..., 0)$
   (utiliser le théorème du multiplicateur de Lagrange)
6. Résoudre le système (4). Montrer que, si r est l'entier définie dans la première partie 1), on a $1 \leq k \leq r$ et que $\varphi(p^*)$ est l'un des nombres $M_1, M_2, ..., M_r$ définis par (2).
7. En déduire la solution du problème $(\mathcal{P})$.

FIN DE L'ÉPREUVE