# Devoir libre $n°$4

à rendre le 07/12/2011

••••••••••

Soit $E$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. $A$ un vecteur non nul de $E$ et $u$ une forme linéaire sur $E$, non nulle. On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $(n,n)$ à coefficients réels. Si $M$ appartient à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\operatorname{Tr} M$ sa trace.

## Partie. I

1. Soit $f$, application de $E$ dans $E$, définie par :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = u(x)A$$

   Montrer que $f$ est un endomorphisme de $E$, déterminer son rang.
2. Déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres de $f$.
3. On suppose que $E$ est de dimension finie $n > 0$.
   Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $A$ et $u$ pour que $f$ soit diagonalisable.
4. Soit $g$, endomorphisme de $E$. On suppose que $E$ est de dimension finie $n > 0$, et que le rang de $g$ est 1.
   (a) Montrer qu'il existe $v$, forme linéaire sur $E$ non nulle et $B$, vecteur de $E$, tels que :

$$\forall x \in E, \quad g(x) = v(x)B$$

   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur $g^2$ pour que $g$ soit diagonalisable.
   (c) On suppose que $g^2 \neq 0$. Montrer qu'il existe une base de $E$ dans la quelle la matrice de $g$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha \end{pmatrix} \text{avec } \alpha \neq 0$$

   (d) On suppose que $g^2 = 0$. Montrer qu'il existe une base de $E$ dans la quelle la matrice de $g$ s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

5. En déduire que deux matrices de rang 1 de $M_n(R)$ sont semblable si et seulement si elles ont même trace.
6. Soit $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -12 \\ 4 & -2 & -8 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$.
   Montrer que $M$ et $N$ sont semblables.(de préférence en utilisant les résultats des questions 4. et 5.).

**Partie. II**

Dans cette partie, $E$ n'est pas nécessairement de dimension finie. On suppose $A \notin \ker u$.
Soit $h$, endomorphisme de $E$, définie par :

$$\forall x \in E, \quad h(x) = u(A)x - u(x)A$$

1. Reconnaître la restriction de $h$ à $\ker u$, déterminer le noyau de $h$.
2. Montrer que la forme linéaire $u \circ h$ est nulle. En déduire l'image de $h$.
3. Déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres de $h$, lorsque $E$ est de dimension finie, l'endomorphisme $h$ est-il diagonalisable ?
4. (a) Soit un réel $\alpha$ non nul.
   Résoudre, selon les valeurs de $\alpha$, l'équation d'inconnue $x$ :

$$(1) \quad \alpha x - u(x)A = 0$$

   (b) Soit alors un vecteur $B$ de $E$.
   Résoudre, selon les valeurs de $\alpha$ et $B$, l'équation d'inconnue $x$ :

$$(2) \quad \alpha x - u(x)A = B$$

5. Appliquer les résultats de la question $II$-4) à la résolution des deux exercices suivants :
   (a) $E$ est l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   Si $M \in E$, $u(M)$ est la trace de $M$. $A$ est une matrice de trace non nulle, et ${}^tA$ est sa transposée.
   Déterminer les matrices $X$ de $E$ telles que :

$$(3) \quad (\operatorname{Tr} A)X - (\operatorname{Tr} X)A = {}^t A - A$$

   (b) $E = \mathscr{C}^0([0,\pi], \mathbb{R})$. Si $f \in E : u(f) = \displaystyle\int_0^\pi f(t)dt$.
   Déterminer les fonctions $f$ de $E$, telles que :

$$(4) \quad \forall x \in [0,\pi], \quad f(x) - \sin(x)\int_0^\pi f(t)dt = \sin\left(\frac{x}{2}\right).$$

**Partie. III**

On suppose maintenant que $E$ est eucliduen, de dimension 3.

1. Montrer que, pour toute forme linéaire $u$ sur $E$, non nulle, il existe un vecteur $\vec{B}$ non nul, unique, tel que :

$$\forall \vec{x} \in E, \quad u(\vec{x}) = \vec{B} \cdot \vec{x} \ \ (\cdot \text{ produit scalaire })$$

2. Soit $P$ le plan vectoriel orthogonal à $\vec{B}$.
   Soit $\vec{A}$, un vecteur de $E$ tel que $\vec{A} \cdot \vec{B} = 0$, et $D = \operatorname{Vect}(\vec{A})$.
   Soit $p$ la projection sur $P$, parallèlement à $D$.
   Exprimer $p(\vec{x})$ en fonction de $\vec{x}$,$\vec{A}$ et $\vec{B}$
3. Interprèter géométriquement l'endomorphisme $h$ de $E$, défini par :

$$\forall \vec{x} \in E, \quad h(\vec{x}) = u(\vec{A})\vec{x} - u(\vec{x})\vec{A}.$$

●●●●●●●●●●●