Devoir libre $n°5$

à rendre le 02/01/12

○●○●○●○

Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel euclidien de dimension $n \geq 1$, le produit scalaire de deux vecteurs x et y de E est noté $(x|y)$, $\|x\| = \sqrt{(x|x)}$ désigne la norme euclidienne de $x \in E$. $\mathscr{L}(E)$ désigne l'espace vectoriel des endomorphismes de E. Si $f \in \mathscr{L}(E)$, $\|f\| = \sup\limits_{\|x\| \leq 1} \|f(x)\|$ est la norme subordonnée de f, et $\rho(f)$ est le rayon spectral de f, c'est-à-dire le plus grand module des racines réelles ou complexes de $\chi_f(\lambda) = \det(f - \lambda \mathrm{Id}_E)$. On désigne par f^* l'endomorphisme adjoint de f.
On admettra que $\rho(f) < 1 \iff$ il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $\|f^k\| < 1 \iff \lim\limits_{k \to \infty} f^k = 0$

Notations

- $\mathscr{S}(E) = \{f \in \mathscr{L}(E) / f = f^*\}$.
- $\mathscr{S}^+(E) = \{f \in \mathscr{S}(E) / \forall x \in E, \ \ (x|f(x)) \geq 0\}$.
- $\mathscr{B}(E) = \{f \in \mathscr{L}(E) / \|f\| \leq 1\}$.
- $\mathscr{B}_0(E) = \{f \in \mathscr{B}(E) / \rho(f) < 1\}$.
- $\mathscr{C}(E) = \{f \in \mathscr{B}(E) / \operatorname{rg}(Id_E - f^* f) \leq 1\}$.
- $\mathscr{C}_0(E) = \{f \in \mathscr{C}(E) / \rho(f) < 1\}$.
- $\mathscr{O}$ est le groupe orthogonal de E, c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes f de E vérifiant $\forall x \in E, \ \ \|f(x)\| = \|x\|$.

Partie : I

1. Soit $f_u \in \mathscr{L}(E)$ la fonction définie par $f_u(x) = (x|u)u$ où u est un vecteur donné de E.
   (a) Vérifier que $f_u \in \mathscr{S}^+(E)$.
   (b) Déterminer le rang de f_u.
   (c) Reconnaître f_u lorsque $\|u\| = 1$.
   (d) Si $\mathscr{B}$ est une base orthonormale de E et si U est la matrice colonne du vecteur u dans la base $\mathscr{B}$, vérifier que la matrice de f_u dans la base $\mathscr{B}$ est $U.{}^tU$.

   Dans la suite, on notera uu^* l'application f_u.
2. Soient u et v deux vecteurs de E. A quelle condition a-t-on $uu^* = vv^*$?
3. Soit $f \in \mathscr{S}(E)$. Montrer l'existence d'une base orthonormale $(e_1, e_2, ..., e_n)$ est un n-uplet $(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$ des réels tels que $f = \sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i e_i e_i^*$.
   Que représentent pour f les réels λ_i et les vecteurs e_i ? A quelle condition f est-elle dans $\mathscr{S}^+(E)$?
4. Soit $f \in \mathscr{S}(E)$. Montrer que $f = 0$ si, et seulement si, $\forall x \in E$, $(x|f(x)) = 0$.
5. Soit $f \in \mathscr{S}^+(E)$ et $x \in E$. Montrer que $f(x) = 0$ si, et seulement si, $(x|f(x)) = 0$.
6. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que $f \in \mathscr{S}^+(E)$ si, et seulement si, il existe n vecteurs $(u_1, u_2, ..., u_n)$ de E tels que $f = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i u_i^*$.

Partie : II

1. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$.
   (a) Montrer que $\forall x \in E, \ \ \|f(x)\|^2 \leq \|x\| \|f^* f(x)\|$. En déduire que $\forall x \in E, \ \ \|f(x)\| \leq \|f^*\| \|x\|$.

(b) Établir que $\|f^*\| = \|f\|$.

2. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$
   (a) vérifier que $f^*f \in \mathscr{S}^+(E)$.
   (b) Montrer que $f \in \mathscr{B}(E)$ si, et seulement si, $Id_E - f^*f \in \mathscr{S}^+(E)$.
3. Soit $f \in \mathscr{B}(E)$. Notons $E_f = \{x \in E/\|f(x)\| = \|x\|\}$ et $E_f^* = \{x \in E/\|f^*(x)\| = \|x\|\}$.
   (a) Montrer que $\|f\| = 1$ si, et seulement si, $E_f \neq \{0\}$
   (b) Montrer que $E_f = \ker(Id_E - f^*f)$ et $E_f^* = \ker(Id_E - ff^*)$
   (c) Établir les égalités suivantes : $f(E_f) = E_f^*$ et $\dim(E_f^*) = \dim(E_f)$.
4. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Vérifier que $f \in \mathscr{C}(E)$ si, et seulement si, $f^* \in \mathscr{C}(E)$ et que $f \in \mathscr{C}_0(E)$ si, et seulement si, $f^* \in \mathscr{C}_0(E)$.
5. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$. Montrer que les propriétés suivantes sont équivalentes :
   i $f \in \mathscr{C}(E)$.
   ii Il existe $u \in E$ tel que $Id_E - f^*f = uu^*$.
   iii Il existe $u \in E$ tel que $\forall x \in E$, $\|x\|^2 - \|f(x)\|^2\| = (u|x)^2$.

Partie : III

Dans toute cette partie, $f \in \mathscr{B}(E)$, F est défini par $F = \{x \in E/\forall k \in \mathbb{N}, \quad f^k(x) \in E_f\}$ et G est l'orthogonal de F dans E.

1. Établir les propriétés suivantes :
   (a) F est un sous-espace vectoriel de E.
   (b) $f(F) = F$ et $f^*(F) = F$.
   (c) $f(G) \subset G$
2. On note $\varphi = f|_F$ et $\psi = f|_G$ les endomorphismes de F et G induits par f.
   (a) Montrer que $\psi \in \mathscr{B}(G)$.
   (b) Montrer que $\varphi \in \mathscr{O}(F)$.
   (c) Soit $x \in E$. On suppose que $x \notin F$ et appelle k le plus petit entier naturel tel que $f^k(x) \notin E_f$. Montrer que la famille $(x, f(x), ..., f^k(x))$ est une famille libre de E. En déduire que $\|f^n(x)\| < \|x\|$.
   (d) Montrer que $\psi \in \mathscr{B}_0(E)$.
3. Établir l'équivalence des trois propriétés suivantes :
   i $f \in \mathscr{B}_0(E)$.
   ii $\|f\|^n < 1$
   iii $F = \{0\}$
4. On suppose dans cette question que $f \in \mathscr{C}(E)$ et que u est un élément de E tel que $Id_E - f^*f = uu^*$.
   (a) Montrer que $x \in F$ si, et seulement si, $(x|u) = (f(x)|x) = ... = (f^{n-1}|x) = 0$.
   (b) En déduire que $f \in C_0(E)$ si, et seulement si, $(u, f^*(u), ..., (f^*)^{n-1}(u))$ est une base de E.
5. On suppose dans cette question que $f \in \mathscr{C}_0(E)$. Montrer qu'il existe $x \in E\backslash\{0\}$ tel que $\|x\| = \|f(x)\| = ... = \|f^{n-1}(x)\|$.
   En déduire que $\|f^k\| = 1$ pour tout $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$ et que $\|f\|^n < 1$.
6. Réciproquement, on suppose que f vérifie $\|f^k\| = 1$ pour tout $k \in \{0, 1, ..., n-1\}$ et que $\|f^n\| < 1$. Soit x un vecteur non nul tel que $\|x\| = \|f^{n-1}(x)\|$. Montrer que $(u, f(u), ..., f^{n-1}(u))$ est une base de E et que $f \in \mathscr{C}_0(E)$.

FIN DE L'ÉPREUVE