Devoir libre $n°6$

à rendre le 16/01/2012

•••••••••

Exercice 1 L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ étant muni de sa structure euclidienne canonique. Pour tout $(a,b,\lambda) \in \mathbb{R}^3$, on note $M(a,b,\lambda)$ ou simplement M matrice :

$$M(a,b,\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda+a & -a & b \\ -a & \lambda+a & b \\ b & b & \lambda \end{pmatrix}$$

Pour tout vecteurs $U = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^3$, on pose $\phi(U,V) = {}^t UMV$. ϕ étant alors la forme bilinéaire symétrique associée à M, on note Q sa forme quadratique.

1. Écrire l'expression de $Q(U)$ en fonction de x, y et z.
2. On suppose le long de cette question que $\lambda = 0$.
   (a) Étudier selon a et b le rang de la forme quadratique Q.
   (b) On suppose que $a = 0$ et $b \neq 0$. Alors
   $$Q(U) = 2b(x+y)z.$$
      i. Donner le rang de Q puis une base de son noyau.
      ii. Utiliser la méthode de Gauss pour calculer la signature de Q.
   (c) On suppose que $a \neq 0$ et $b = 0$. Alors
   $$Q(U) = a(x-y)^2.$$
   Donner le rang de Q et sa signature, puis une base de son noyau.
   (d) On suppose que $ab \neq 0$. Alors
   $$Q(U) = a(x-y)^2 + 2b(x+y)z.$$
      i. Utiliser le calcul de la question $2.(b)$ ii, pour réduire $Q(U)$ en somme de carrés.
      ii. Donner alors, en justifiant, la signature de Q.
3. On suppose le long de cette question que $\lambda = 3, a = -1$ et $b = -1$. Alors
   $$Q(U) = 2x^2 + 2y^2 + 3z^2 + 2xy - 2xz - 2yz.$$
   (a) Réduire en carrés, par la méthode de Gauss, la forme quadratique $Q(U)$.
   (b) En déduire alors le rang et la signature de Q.
   (c) Déterminer une base Q-orthogonale.
4. On suppose le long de cette question que $\lambda = 2, a = -1$ et $b = 1$. Alors
   $$Q(U) = x^2 + y^2 + 2z^2 + 2xy + 2xz + 2yz.$$
   (a) Réduire en carrés, par la méthode de Gauss, la forme quadratique $Q(U)$.
   Pour tout $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, on pose $u(x,y) = \begin{pmatrix} x \\ xy \\ y \end{pmatrix}$, puis $f(x,y) = Q(u(x,y))$.
   (b) Calculer explicitement $f(x,y)$, puis justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$.
   (c) Vérifier que f admet exactement deux points critiques, que l'on précisera. (indication : on pourra remarquer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 2(y+1)(x+xy+y)$)
   (d) Utiliser la question $4.(a)$ pour montrer que l'un de ces points critiques (à préciser) correspond à un minimum global de f.
   (e) Vérifier que $f(-2+t,-1+t) - f(-2,-1) = 2t^3 + o(t^3)$. Qu'en déduit-on pour l'autre point critique.

Exercice 2 *Partie I. Calcul de la somme d'une série convergente*

1. Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)dt = \frac{1}{n^2}$.
2. Établir, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout t de $]0, \pi]$:
$$\frac{1-e^{imt}}{1-e^{it}}e^{it} = \frac{\sin\frac{tm}{2}}{\sin\frac{t}{2}}e^{\frac{i(m+1)t}{2}}, \text{ puis } \sum_{n=1}^{m}\cos(nt) = \frac{\cos\frac{(m+1)t}{2}\sin\frac{mt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}.$$
3. Soit $u : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties que
$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^\pi u(t)\sin(\lambda t)dt = 0.$$
.
4. Soit l'application $f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{\frac{t^2}{2\pi} - t}{2\sin\frac{t}{2}}$ si $t \in]0, \pi]$ et $f(0) = -1$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi]$
5. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{2} + \int_0^\pi f(t)\sin\frac{(2m+1)t}{2}dt$. Puis que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{2}$.

Partie II- Etude d'une somme de série de fonctions

1. Montrer que, pour tout x de $[0, +\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$ converge.
On note S sa somme, pour tout x de $[0, +\infty[$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)$
2. Calculer $S(0)$ et $S(1)$.
3. Étudier la suite $(S(n) - S_n(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et conclure que la série S ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$.
4. Dans cette question, on veut démontrer que S est continue sur $[0, +\infty[$.
   (a) Montrer que pour tout $A > 0$, la série converge uniformément sur $[0, A]$.
   (b) En déduire que S est continue sur $[0, +\infty[$.
5. Dans cette question, on veut démontrer que S est dérivable sur $[0, +\infty[$.
   (a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{(n+x)^2}$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.
   (b) En déduire que S est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+x)^2}$.
6. Montrer que S est deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$ et qu'elle est concave.
7. Soit $x \in]0, +\infty[$ fixé. On note φ la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par : $\forall t \in [1, +\infty[,\ \ \varphi(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+x}$.
   (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty}\varphi(t)dt$ converge et calculer sa valeur.
   (b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n+1) \leq \displaystyle\int_n^{n+1}\varphi(t)dt \leq \varphi(n)$, et en déduire : $\displaystyle\int_1^{+\infty}\varphi(t)dt \leq S(x) \leq 1 + \int_1^{+\infty}\varphi(t)dt$.
   (c) Conclure que $S(x)$ équivaut à lnx en $+\infty$.
8. Dresser le tableau de variation de S, en précisant la limite de S en $+\infty$. Puis tracer l'allure de la courbe représentative de S.

●●●●●●●●●●