

## Devoir libre n°7

à rendre le 06/02/2012

● ● ● ● ● ● ● ● ● ●

Dans tout le problème  $I$  désigne l'intervalle  $]0, +\infty[$ .

1. Soient  $x \in I, y \in I, x \neq y$ . Montrer que :  $\frac{y-x}{y} \leq \ln \frac{y}{x} \leq \frac{y-x}{x}$ .
2. Soit  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites de nombres réels telles que, pour tout  $n$ , on ait :

$$0 \leq a_{n+1} - a_n \leq \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}.$$

On suppose que les  $\varepsilon_n$  sont positifs et que la suite  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  tend vers 0 lorsque  $n$  tend vers  $+\infty$ . Montrer que la suite  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente.

3. Montrer que les résultats de la question précédente s'appliquent dans les cas :

$$(a) \quad a_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} \text{ et } \varepsilon_n = \frac{1}{n}.$$

$$(b) \quad a_n = \ln n - \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} \text{ et } \varepsilon_n = \frac{1}{n}.$$

4. Pour tout  $x \in I$  et pour tout  $n \geq 1$ , on pose :

$$f_n(x) = \ln \frac{n^n}{x(x+1)\dots(x+n)}.$$

En exprimant  $f_n(x)$  sous forme de somme, étudier les propriétés de la fonction  $f_n$  définie sur  $I$  : continuité, dérivabilité, convexité, limites aux bornes du domaine de définition, directions asymptotiques et asymptotes éventuelles, croissance. (on ne cherchera pas à déterminer les coordonnées des extréma et on distinguera les cas  $n = 1$  et  $n > 1$ ).

5. Pour tout  $x \in I$  et pour tout  $n \geq 1$ , on pose  $\varepsilon_n = \frac{x(x+1)}{x}$ . Montrer, en utilisant la première question, que pour tout  $x \in I$  et pour tout  $n \geq 1$ , on a :

$$0 \leq f_{n+1}(x) - f_n(x) \leq \varepsilon_n - \varepsilon_{n+1}.$$

6. Dédurre des questions précédentes que pour tout  $x \in I$  fixé, la suite des nombres réels  $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  admet une limite. On désignera cette limite par  $f(x)$ .

On se propose d'étudier les propriétés de la fonction  $f$  définie sur  $I$ , qui à  $x$  associe  $f(x)$ .

7. Pour tout  $x \in I$  et pour tout  $n \geq 1$ , on pose :

$$g_n(x) = f_n(x+1) - f_n(x).$$

Montrer que pour tout  $x$  dans  $I$  fixé, la suite  $(g_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $\ln x$ . En déduire la valeur de

$$f(x+1) - f(x).$$

8. Montrer que  $f(1) = 0$ . En déduire la valeur de  $f(n)$  pour tout  $n$  entier naturel supérieur à 1.

9. Montrer que  $f$  vérifie les propriétés suivantes :

(a)  $f$  est convexe.

$$(b) \quad \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty.$$

$$(c) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$(d) \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = +\infty.$$

(e)  $f(x) \leq 0$  si, et seulement si,  $x \in [1, 2]$ .

10. Soit  $\Gamma$  la fonction définie par  $\Gamma(x) = e^{f(x)}$ . Montrer que la fonction  $\Gamma$  vérifie les propriétés suivantes :

(a) Pour tout  $x \in I, \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ .

(b)  $\Gamma(1) = 1$ .

(c)  $\Gamma$  est convexe.

En déduire la valeur de  $\Gamma(n)$  pour tout  $n \geq 1$ .

FIN DE L'ÉPREUVE