Devoir libre n°10
à rendre le 14/03/2013

•••••

On note $\mathcal{D}$ le demi plan ouvert $\mathcal{D} = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) > 0\}$. On définit la "fonction Gamma d'Euler" sur $\mathcal{D}$ par :

$$\forall z \in \mathcal{D}, \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

1. Montrer que Γ est une fonction holomorphe sur $\mathcal{D}$.
2. Montrer que pour tout $z \in \mathcal{D}$, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.
3. Montrer que pour tout $z \in \mathcal{D}$,

$$\Gamma(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n} \right) + \int_1^{+\infty} t^{z-1} e^{-t} dt.$$

4. Montrer que la fonction $z \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{1}{z+n}$ est définie sur la partie $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ du plan complexe et qu'elle y est continue.
La formule précédente permet de prolonger la fonction Γ à $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$.
5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $z \in \mathcal{D}$,

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = \frac{n^z n!}{z(z+1)\dots(z+n)}.$$

(on pourra utiliser le changement de variable $u = \frac{t}{n}$, puis une intégration par parties).

6. En utilisant le théorème de convergence dominée, démontrer que, pour tout $z \in \mathcal{D}$:

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)\dots(z+n)}.$$

(formule de Gauss).

FIN DE L'ÉPREUVE