

DEVOIR LIBRE n°2

à rendre le 18/10/12

○ ● ○ ● ○ ● ○

Exercice 1Soient φ et ψ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}_+^{*2}$ et f la fonction :

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) \longmapsto \varphi\left(\frac{y}{x}\right) \sqrt{xy} + \psi(xy)$$

1. Montrer que : $x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0$ (1)

2. On pose $g(u, v) = f(x, y)$ avec $u = xy$ et $v = \frac{y}{x}$.

Montrer que (1) $\iff \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) - 2u \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) = 0$ (2)

3. Soit $v \in \mathbb{R}_+^*$, on pose :

$$h : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R} \\ u \longmapsto \frac{\partial g}{\partial v}(u, v)$$

alors h vérifie l'équation différentielle linéaire : $z - 2uz' = 0$ (3)

Résoudre l'équation différentielle (3). En déduire la solution générale de (2) puis (1).

Exercice 2On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = \left(x - \frac{1}{2} \sin y, y + \frac{1}{2} \sin x \right).$$

1. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^2$ et déterminer sa matrice jacobienne.

2. Montrer que pour tout $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4$,

$$f(x_1, y_1) = f(x_2, y_2) \implies \|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\| \leq \frac{1}{2} \|(x_1 - x_2, y_1 - y_2)\|,$$

où $\|\cdot\|$ est la norme euclidienne de $\mathbb{R}^2$.

3. En déduire que f est un $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme de $\mathbb{R}^2$ sur son image $f(\mathbb{R}^2)$.

4. Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ définie par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \varphi(x, y) = \left(a + \frac{1}{2} \sin y, b - \frac{1}{2} \sin x \right).$$

(a) En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que pour tout $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{R}^4$, on a :

$$\|\varphi(x_1, y_1) - \varphi(x_2, y_2)\| \leq \frac{1}{2} \|(x_1, y_1) - (x_2, y_2)\|.$$

(b) En déduire que $f(\mathbb{R}^2) = \mathbb{R}^2$.

5. Calculer $d(f^{-1})_{(0,0)}$.

● ● ● ● ● ● ● ● ● ●