à rendre le 18/10/12

○●○●○●○

Exercice 1

On désigne par f la fonction de deux variables définie par :

$$f(x,y) = y^3 + xy - e^x$$

1. On considère la relation $f(x,y) = 0$.
   (a) Montrer que cette relation définit, au voisinage de $(0,1)$, la variable y comme une fonction de x (on énoncera soigneusement le théorème utilisé).
   (b) Montrer que cette fonction admet au voisinage de 0, un développement limité à l'ordre 2 et déterminer ce développement. Donner l'allure de la courbe au voisinage de 0.
2. On considère l'équation : $(E)\ \ f(x,y) = 0$, où y est l'inconue et la variable x est un paramètre positif ou nul.
   (a) Montrer que, pour tout x positif ou nul, cette équation possède une solution réelle unique notée $u(x)$. Montrer que les parties réelles des solutions complexes et non réelles sont négatives ou nulles.
   (b) Montrer que u est de classe $\mathscr{C}^1$, et étudier les variations de la fonction u.
   (c) Montrer que u induit un difféomorphisme de classe $\mathscr{C}^1$ de $]0,+\infty[$ dans $]1,+\infty[$.
   (d) i. Montrer que, pour tout x positif, on a :

   $$0 \leq u(x) \leq e^{\frac{x}{3}}$$

   ii. Montrer que, pour tout x positif, on a :

   $$0 \leq e^x - u(x)^3 \leq xe^{\frac{x}{3}}$$

   iii. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$, on a :

   $$u(x) = e^{\frac{x}{3}} + O(xe^{\frac{-x}{3}})$$

   et en déduire le développement asymptotique de u en $+\infty$:

   $$u(x) = e^{\frac{x}{3}} - \frac{1}{3}xe^{\frac{-x}{3}} + O(x^2e^{-x}).$$

Exercice 2

Soit U un voisinage de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$. Soient $f_1, f_2 : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions numériques de classe $\mathscr{C}^1$ telles que $f_1(0,0) = f_2(0,0) = 0$ et soit $F : U \to \mathbb{R}$ définie par :

$$F(x,y) = x^2(1 + f_1(x,y)) + y^2(1 + f_2(x,y)).$$

1. Vérifier que les applications $g_i : U \to \mathbb{R}$, $(i = 1,2)$ définies par :

   $$g_1(x,y) = x(1 + f_1(x,y))^{\frac{1}{2}}, \quad g_2(x,y) = y(1 + f_2(x,y))^{\frac{1}{2}}$$

   sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur un voisinage V de $(0,0)$ dans $\mathbb{R}^2$; on calculera $dg_i(0,0)$.
2. Montrer qu'il existe un voisinage U' de $(0,0)$ tel que l'application $h : U' \to \mathbb{R}$ définie par

   $$h(x,y) = (g_1(x,y), g_2(x,y))$$

   soit un $\mathscr{C}^1$-difféomrphisme de U' sur $h(U')$.
   En déduire que pour $r > 0$ assez petit, l'ensemble

   $$U_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / F(x,y) < r^2\}$$

   est un $\mathscr{C}^1$-difféomorphe au disque de rayon r.

Exercice 3

On considère g définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$g(x,y) = (x^2 - 1)\arctan(x^2 + y^2)$$

1. Montrer que g possède un maximum local.
2. Montrer que g possède deux autres points critiques qui ne sont pas des extremums locaux.
3. Établir une majoration sur $[-1,1] \times \mathbb{R}$ du type :

$$|g(x',y') - g(x,y)| \leq A|x' - x| + B|y' - y|$$

où A et B sont des constantes.
En déduire que g est uniformément cotinue sur $[-1,1] \times \mathbb{R}$

•••••••••••