Devoir libre $n°$4

à rendre le 26/11/2012

•••••••••••

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel. A un vecteur non nul de E et u une forme linéaire sur E, non nulle. On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices (n,n) à coefficients réels. Si M appartient à $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on note $\operatorname{Tr} M$ sa trace.

PREMIÈRE PARTIE

1. Soit f, application de E dans E, définie par :

$$\forall x \in E, \quad f(x) = u(x)A$$

   Montrer que f est un endomorphisme de E, déterminer son rang.
2. Déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres de f.
3. On suppose que E est de dimension finie $n > 0$.
   Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur A et u pour que f soit diagonalisable.
4. Soit g, endomorphisme de E. On suppose que E est de dimension finie $n > 0$, et que le rang de g est 1.

   (a) Montrer qu'il existe v, forme linéaire sur E non nulle et B, vecteur de E, tels que :

$$\forall x \in E, \quad g(x) = v(x)B$$

   (b) Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur g^2 pour que g soit diagonalisable.

   (c) On suppose que $g^2 \neq 0$. Montrer qu'il existe une base de E dans la quelle la matrice de g s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha \end{pmatrix} \text{avec } \alpha \neq 0$$

   (d) On suppose que $g^2 = 0$. Montrer qu'il existe une base de E dans la quelle la matrice de g s'écrit :

$$\begin{pmatrix} 0 & & 1 \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix}$$

5. En déduire que deux matrices de rang 1 de $M_n(R)$ sont semblable si et seulement si elles ont même trace.
6. Soit les deux matrices $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 1 & 2 & -3 \end{pmatrix}$ et $N = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -12 \\ 4 & -2 & -8 \\ 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}$ de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.
   Montrer que M et N sont semblables.(de préférence en utilisant les résultats des questions 4. et 5.).

DEUXIÈME PARTIE

Dans cette partie, E n'est pas nécessairement de dimension finie. On suppose $A \notin \ker u$.
Soit h, endomorphisme de E, définie par :

$$\forall x \in E, \;\; h(x) = u(A)x - u(x)A$$

1. Reconnaître la restriction de h à $\ker u$, déterminer le noyau de h.
2. Montrer que la forme linéaire $u \circ h$ est nulle. En déduire l'image de h.
3. Déterminer les valeurs propres et les sous espaces propres de h, lorsque E est de dimension finie, l'endomorphisme h est-il diagonalisable ?
4. (a) Soit un réel α non nul.
   Résoudre, selon les valeurs de α, l'équation d'inconnue x :

   $$(1) \quad \alpha x - u(x)A = 0$$

   (b) Soit alors un vecteur B de E.
   Résoudre, selon les valeurs de α et B, l'équation d'inconnue x :

   $$(2) \quad \alpha x - u(x)A = B$$

5. Appliquer les résultats de la question II-4) à la résolution des deux exercices suivants :

   (a) E est l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
   Si $M \in E$, $u(M)$ est la trace de M. A est une matrice de trace non nulle, et ${}^tA$ est sa transposée.
   Déterminer les matrices X de E telles que :

   $$(3) \quad (\mathrm{Tr}\, A)X - (\mathrm{Tr}\, X)A = {}^tA - A$$

   (b) $E = \mathscr{C}^0([0,\pi], \mathbb{R})$. Si $f \in E : u(f) = \displaystyle\int_0^\pi f(t)dt$.
   Déterminer les fonctions f de E, telles que :

   $$(4) \quad \forall x \in [0,\pi], \;\; f(x) - \sin(x)\int_0^\pi f(t)dt = \sin\left(\frac{x}{2}\right).$$

FIN DE L'ÉPREUVE