Devoir libre $n°5$

à rendre le 20/12/2012

●●●●●●●●●●

DÉFINITIONS : Toutes les matrices considérées sont réelles et carrées. On identifie une matrice à l'endomorphisme associé de $\mathbb{R}^n$ (n est un entier fixé supérieure ou égal à 2). Si $\|.\|$ est une norme sur $\mathbb{R}^n$, on note de la même façon la norme sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$:

$$\|A\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \|Ax\|.$$

On considérera les deux normes $\|x\|_2 = (x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$ et $\|x\|_\infty = \max_{i\in[\![1,n]\!]} |x_i|$ où $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$.
On notera B_n la matrice $(b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ avec $b_{ij} = -1$ si $|i-j| = 1$ et 0 sinon. e_n est le vecteur $(1, 1, ..., 1)$.
Pour $\lambda \geq 0$, on pose $A_\lambda = (2+\lambda)I_n + B_n$ où I_n est la matrice unité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ (en toute rigueur, il faudrait l'indicer par n, mais on ne surchargera pas les notions).
On dira qu'une matrice M (ou un vecteur v) est positive (positif) si tous ses coefficients (ses composantes) sont positifs (positives). On notera $M \geq 0$ ($v \geq 0$).
On dira qu'une matrice est monotone si elle est inversible et d'inverse positive.

PRÉLIMINAIRE

1. Soit $M = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $\|M\|_\infty = \max_{i\in[\![1,n]\!]} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$.
2. Soit $\|.\|$ une norme sur $\mathbb{R}^n$ et λ une valeur propre réelle de M. Montrer que $|\lambda| \leq \|M\|$.
3. On suppose M symétrique. Montrer que $\|M\|_2$ est le maximum des valeurs absolues des valeurs propres réelles de M.

PARTIE I : DIAGONALISATION DE A_0

1. Montrer que les valeurs propres réelles ou complexes de B_n sont dans $[-2, 2]$.
2. Soit θ dans $]0, \pi[$, on note $u_n(\theta) = \det(2\cos\theta I_n - B_n)$.
   (a) Calculer $u_n(\theta)$. (chercher une relation de récurrence)
   (b) En déduire que B_n a les n valeurs propres distinctes $\lambda_k = 2\cos\left(\frac{k\pi}{n+1}\right)$ pour $k \in [\![1, n]\!]$.
3. (a) Quelles sont les valeurs propres de A_0 et la dimension des sous-espaces propres ?
   (b) Que vaut $\|A_0^{-1}\|_2$? En donner un équivalent simple quand n tend vers l'infini.

PARTIE II

1. Soit M une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On pose $E_1 = \{v \in \mathbb{R}^n / v \geq 0\}$ et $E_2 = \{v \in \mathbb{R}^n / Mv \geq 0\}$. Montrer que M est monotone si, et seulement si, $E_2 \subset E_1$.
2. Soit M une matrice positive. Montrer que $\|M\|_\infty = \|Me_n\|_\infty$.
3. (Question assez difficile)
   (a) Montrer que, pour tout $\lambda \geq 0$, A_λ est monotone.
   (b) Montrer que, pour tout $\lambda \geq 0$, $A_0^{-1} - A_\lambda^{-1} \geq 0$.
   (c) En déduire que $\|A_\lambda^{-1}\|_\infty \leq \|A_0^{-1}e_n\|_\infty$.

PARTIE III : ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE

Pour $\alpha \geq 0$ et f une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, on appelle $(\mathscr{P})$ le problème :

$$\begin{cases} -u'' + \alpha u = f \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases}$$

On admettra que le problème $(\mathscr{P})$ a une solution unique u et qu'elle est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

1. On suppose, dans cette question seulement, f constante. Montrer que si on suppose pas $\alpha \geq 0$, $(\mathscr{P})$ peut n'avoir aucune solution ou une infinité.
   Jusqu'à la fin, $h = \dfrac{1}{n+1}$, $\lambda = \alpha h^2$, $x_i = ih$ ($i \in [\![0, n+1]\!]$), $X_n = (u(x_i))_{1\leq i\leq n}$, $Y_n = (h^2 f(x_i))_{1\leq i\leq n}$ et $M_0 = \sup\limits_{x\in[0,1]} |u^{(4)}(x)|$.
2. (a) Montrer que, pour $i \in [\![1, n]\!]$, il existe $\beta_i \in]x_{i-1}, x_{i+1}[$ tel que :
   $$u(x_{i+1}) - 2u(x_i) + u(x_{i-1}) = h^2 u''(x_i) + \frac{h^4}{12} u^{(4)}(\beta_i).$$
   (b) Montrer qu'il existe Z_n dans $\mathbb{R}^n$ tel que :
   $$\|Z_n\|_\infty \leq \frac{M_0}{12(n+1)^4} \quad \text{et} \quad A_\lambda(X_n) = Y_n + Z_n$$
   On définit alors $\overline{X}_n$ par : $\overline{X}_n = A_\lambda^{-1}(Y_n) = (a_1, a_2, ..., a_n)$
3. (a) Calculer M_0 et $\overline{X}_n$ pour $f : x \mapsto 1$ et $\alpha = 0$.
   (b) En déduire $\|A_0^{-1}\|_\infty$. Comparer avec la question 3. de la partie I
   (c) Montrer que $\sup\limits_{i\in[\![1,n]\!]} |u(x_i) - a_i| \leq \dfrac{M_0}{96(n+1)^2}$.

FIN DE L'ÉPREUVE