Devoir libre $n°$6

à rendre le 07/01/2013

●●●●●●●●●●

Dans tout le problème, E est un espace vectoriel complexe de dimension finie $n \geq 2$, muni d'un produit scalaire hermitien et noté $(x|y)$ pour tout $(x, y) \in E^2$; la norme de x associée à ce produit scalaire est notée $\|x\|$. Pour tout partie non vide K de E, on notera $K^\perp$ l'orthogonal de K.
Comme pour les espaces euclidiens pour $f \in \mathscr{L}(E)$, on montre qu'il existe un unique endomorphisme f^* de E tel que :

$$\forall (x, y) \in E^2, \ \ (f(x)|y) = (x|f^*(y)).$$

f^* s'appelle l'adjoint de f.
Dans les espaces hermitiens on définit l'équivalent des endomorphismes symétriques et orthogonaux des espaces euclidiens. On définit les endomorphismes hermitiens ($f^* = f$), et les endomorphismes unitaires ($f \circ f^* = Id_E$).
DÉFINITION : *Soit f un endomorphisme de E. On dit que f est un endomorphisme unitaire s'il conserve le produit scalaire, c'est-à-dire si pour tous x, y de E, on a : $(f(x)|f(y)) = (x|y)$.*

Puisqu'il conserve le produit scalaire, il conserve la norme, et f est donc une isométrie. En outre, un endomorphisme unitaire est toujours inversible, son inverse étant son adjoint f^*. L'ensemble des endomorphismes unitaires forme un groupe pour l'opération de composition des applications : on l'appelle groupe unitaire, et on le note $U(E)$.

THÉORÈME : *Un endomorphisme de E est unitaire si et seulement si il est diagonalisable dans une base orthonormale et ses valeurs propres sont de module 1.*

DÉFINITION : *f endomorphisme d'un espace hermitien E est dit hermitien lorsque $f^* = f$.*

THÉORÈME : *Si f est un endomorphisme hermitien, alors f est diagonalisable dans une certaine base orthonormale et ses valeurs propres sont réelles.*

Dans la suite, S est un endomorphisme de E tel que $I - S^*S$ soit de rang 1 et φ la forme hermitienne égale pour tout $x \in E$ à $\varphi(x) = \|x\|^2 - \|S(x)\|^2$. D'autre part, pour tout y non nul de E, on note A_y l'endomorphisme définie sur E par $A_y(x) = (x|y).y$.

1. (a) S peut-il être unitaire ? La forme hermitienne φ peut-elle être identiquement nulle ?
   (b) Combien l'endomorphisme S^*S possède-t-il de valeurs propres distinctes ? Indiquer pour chacune d'elles sa valeur dans $\mathbb{C}$.
   (c) Quelles sont les dimensions et les relations mutuelles des sous-espaces propres correspondants ?
2. Dans toute la suite, on suppose que la forme hermitienne φ est positive.
   (a) Calculer $\|S\|$.

(b) Montrer que φ est le carrée du module d'une forme linéaire sur E, et qu'il existe un élément y non nul de E tel que $I - S^*S = A_y$. Pour quels $y' \in E$ a-t-on $A_{y'} = A_y$.

(c) Comparer $\|y\|$ à 1.

(d) Montrer que pour tout $x \in \{y\}^\perp$, on a $\|S(x)\| = \|x\|$.

(e) On considère l'ensemble des modules des valeurs propres de tous les endomorphismes $S' \in \mathscr{L}(E)$ tels que $I - S'^*S' = A_y$. Quels sont le plus grand et le plus petit des éléments de cet ensemble.

3. Dans cette question, on suppose en autre que S n'est pas inversible.

   (a) Quel est le noyau de S ?

   (b) Calculer $\|y\|$. Quelle définition géométrique peut-on donner de Ay. Quelles sont les valeurs propres de S^*S ?

   (c) Comparer l'image S et le noyau de S^* respectivement au noyau et à l'image de $I - SS^*$.

   (d) Montrer qu'il existe un élément $z \in E$, dont on précisera la droite vectorielle $\mathbb{C}z$ et la norme, tel que $I - SS^* = A_z$. Quelles sont les valeurs propres de SS^* et les sous-espaces correspondants ?

4. Dans cette question, on suppose au contraire que S est inversible.

   (a) Comparer $\|y\|$ à 1. Quelles sont les valeurs propres de S^*S ?

   (b) Déterminer l'image et le noyau de $I - SS^*$.

   (c) Déterminer un élément w de E tel que $I - SS^* = A_w$ et comparer les normes de w et de y. Quelles sont les valeurs propres de SS^* et les sous-espaces correspondants ? Comment déduit-on ces sous-espaces propres des sous-espaces propres de S^*S ?

FIN DE L'ÉPREUVE