Devoir libre $n°7$
à rendre le 21/01/2013

EXPONENTIELLE MATRICIELLE
UNE DEUXIÈME DÉFINITION

1. Étudier la suite $\left(\left(1+\frac{z}{n}\right)^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, où z est nombre complexe.
2. On considère dans $(\mathscr{M}_n(\mathbb{C}), \|.\|)$ muni d'une structure d'algèbre normée. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$). Montrer que pour tout $p \geq 1$:
$$\left\|\exp(A) - \left(I_n + \frac{1}{p}A\right)^p\right\| \leq e^{\|A\|} - \left(\|I_n\| + \frac{1}{p}\|A\|\right)^p$$
3. On considère, pour A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, $f_p(A) = \left(I_n + \frac{1}{p}A\right)^p$. Montrer que la suite $(f_p)_{p\geq 1}$ converge uniformement sur tout compact de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
4. On considére $(\varepsilon_p)_{p\geq 1}$ une suite de limite nulle, d'éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et A dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Démontrer que
$$\lim_{p\to\infty}\left(I_n + \frac{1}{p}\left(A+\varepsilon_p\right)\right)^p = \exp(A).$$
En déduire que si A et B commutent dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on a :
$$\exp\left(A+B\right) = \exp(A)\exp(B).$$

• • • • • • • • •