Devoir libre $n°8$
à rendre le 28/01/2013

●●●●●●●●●

Partie I. Calcul de la somme d'une série convergente

1. Vérifier, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$: $\displaystyle\int_0^\pi \left(\frac{t^2}{2\pi} - t\right)\cos(nt)dt = \frac{1}{n^2}$.
2. Établir, pour tout $m \in \mathbb{N}^*$ et tout t de $]0, \pi]$:
$$\frac{1-e^{imt}}{1-e^{it}}e^{it} = \frac{\sin\frac{tm}{2}}{\sin\frac{t}{2}}e^{\frac{i(m+1)t}{2}}, \text{ puis } \sum_{n=1}^{m}\cos(nt) = \frac{\cos\frac{(m+1)t}{2}\sin\frac{mt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}.$$
3. Soit $u : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$. Montrer, à l'aide d'une intégration par parties que
$$\lim_{\lambda\to+\infty}\int_0^\pi u(t)\sin(\lambda t)dt = 0.$$
.
4. Soit l'application $f : [0, \pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = \dfrac{\dfrac{t^2}{2\pi} - t}{2\sin\dfrac{t}{2}}$ si $t \in]0, \pi]$ et $f(0) = -1$. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi]$
5. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{n=1}^{m}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} + \int_0^\pi f(t)\sin\frac{(2m+1)t}{2}dt$. Puis que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

Partie II- Etude d'une somme de série de fonctions

1. Montrer que, pour tout x de $[0, +\infty[$, la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$ converge.

   On note S sa somme, pour tout x de $[0, +\infty[$, $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+x}\right)$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+x}\right)$
2. Calculer $S(0)$ et $S(1)$.
3. Étudier la suite $(S(n) - S_n(n))_{n\in\mathbb{N}^*}$ et conclure que la série S ne converge pas uniformément sur $[0, +\infty[$.
4. Dans cette question, on veut démontrer que S est continue sur $[0, +\infty[$.
   (a) Montrer que pour tout $A > 0$, la série converge uniformément sur $[0, A]$.
   (b) En déduire que S est continue sur $[0, +\infty[$.
5. Dans cette question, on veut démontrer que S est dérivable sur $[0, +\infty[$.
   (a) Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*}\frac{1}{(n+x)^2}$ converge uniformément sur $[0, +\infty[$.
   (b) En déduire que S est dérivable sur $[0, +\infty[$ et que $S'(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+x)^2}$.
6. Montrer que S est deux fois dérivable sur $[0, +\infty[$ et qu'elle est concave.
7. Soit $x \in]0, +\infty[$ fixé. On note φ la fonction définie sur $[1, +\infty[$ par : $\forall t \in [1, +\infty[, \ \ \varphi(t) = \dfrac{1}{t} - \dfrac{1}{t+x}$.
   (a) Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty}\varphi(t)dt$ converge et calculer sa valeur.
   (b) Montrer : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\varphi(n+1) \leq \displaystyle\int_n^{n+1}\varphi(t)dt \leq \varphi(n)$, et en déduire : $\displaystyle\int_1^{+\infty}\varphi(t)dt \leq S(x) \leq 1 + \int_1^{+\infty}\varphi(t)dt$.
   (c) Conclure que $S(x)$ équivaut à $\ln x$ en $+\infty$.
8. Dresser le tableau de variation de S, en précisant la limite de S en $+\infty$. Puis tracer l'allure de la courbe représentative de S.

●●●●●●●●●●●