Devoir libre $n°9$
à rendre le 25/02/2013

•••••••••

Développement de la fonction tangente en série entière

NOTATIONS ET DÉFINITIONS

• $\mathbb{R}$ désigne l'ensemble des nombres réels ;
• $\mathbb{Z}$ désigne l'ensemble des entiers relatifs ;
• π représentant le nombre pi, on désigne par F l'ensemble des multiples de π, soit $F = \pi\mathbb{Z}$, et par E le complémentaire de F dans $\mathbb{R}$, soit $E = \mathbb{R}\backslash\pi\mathbb{Z}$;
• C désigne le sous-ensemble de E formé par l'intervalle ouvert $]-\pi, \pi[$ privé de zéro ;
• D désigne le sous-ensemble de E formé par le segment fermé $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ privé de zéro.

PROBLÈME

1. Montrer que la fonction $x \longmapsto \dfrac{1}{\sin^2 x} - \dfrac{1}{x^2}$ est bornée dans D.

2. Montrer que, pour tout x appartenant à E, la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{\sin^2 x}$ vérifie :
$$4f(x) = f\left(\frac{x+\pi}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2}\right)$$

3. On pose $g(x) = \dfrac{1}{x^2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{1}{(x-k\pi)^2} + \frac{1}{(x+k\pi)^2}\right]$.
   (a) Montrer que la fonction g est définie pour tout x de E.
   (b) Montrer que sur E, g est une fonction paire et de période π.
   (c) Montrer que pour tout x appartenant à E on a :
$$4g(x) = g\left(\frac{x+\pi}{2}\right) + g\left(\frac{x}{2}\right)$$

4. Montrer que la fonction $x \longmapsto g(x) - \dfrac{1}{x^2}$ est définie et bornée dans D.

5. On désigne par h la fonction définie pour tout x de E par $h(x) = f(x) - g(x)$.
   (a) Montrer que h est bornée dans E.
   (b) Montrer que h vérifie pour tout x de E :
$$4h(x) = h\left(\frac{x+\pi}{2}\right) + h\left(\frac{x}{2}\right)$$
   (c) En déduire que pour tout x de E $h(x) = 0$.

6. Montrer que pour tout x appartenant à D on a :
$$\text{cotan}(x) = \frac{1}{x} + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{2x}{x^2 - k^2\pi^2}.$$
   Montrer que cette égalité est également vraie pour tout x de E.

7. A tout couple (n, p) d'entiers strictement positifs, on associe un réel positif au sens large : u_{np}.
   On suppose que pour tout n entier strictement positif la série $\displaystyle\sum_{p\in\mathbb{N}^*} u_{np}$ est convergente et l'on note A_n sa somme : $A_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{\infty} u_{np}$.
   On suppose également que la série $\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{N}^*} A_n$ converge et l'on note S sa somme.

(a) Montrer que pour tout p entier strictement positif la série $\sum_{k\in\mathbb{N}^*} u_{kp}$ converge.

(b) On pose $B_p = \sum_{k=1}^{\infty} u_{kp}$.

Montrer que la série $\sum_{p\in\mathbb{N}^*} B_p$ converge et que $\sum_{p=1}^{\infty} B_p = S$.

8. Pour tout k, entier strictement supérieur à 1, on désigne par $\zeta(k)$ la somme de la série convergente $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^k}$

(a) Déterminer l'intervalle de convergence de la série entière $\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\zeta(2p)}{\pi^{2p}} x^{2p-1}$.

(b) Montrer que pour tout x appartenant à l'ensemble C on a :

$$\text{cotan}x - \frac{1}{x} = -2\sum_{p=1}^{\infty} \frac{\zeta(2p)}{\pi^{2p}} x^{2p-1}.$$

9. Montrer que la fonction $\tan x$ est développable en série entière sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et exprimer les coefficients de cette série entière en utilisant l'application ζ.
10. Montrer que pour tout entier p strictement positif $\zeta(2p)$ est le produit de π^{2p} par un rationnel dont on donnera la valeur dans les seuls cas $p = 1$, $p = 2$, $p = 3$.

FIN DE L'ÉPREUVE