

Devoir libre n°1
à rendre le 23/09/2013

• • • • •

Exercice 1

Étude de la suite géométrique $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$ où z est nombre complexe.

Exercice 2

Étant donnés $p+1$ nombres complexes fixés $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$, on considère l'ensemble E des suites complexes $(x_n)_{n \geq 0}$ vérifiant la relation de récurrence suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+p+1} = \alpha_0 x_n + \alpha_1 x_{n+1} + \dots + \alpha_p x_{n+p} \quad (1)$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel sur $\mathbb{C}$.
2. Soit φ l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \quad E &\longrightarrow \mathbb{C}^{p+1} \\ (x_n)_{n \geq 0} &\longmapsto (x_0, x_1, \dots, x_p) \end{aligned}$$

Établir que φ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

3. Soit f l'application :

$$\begin{aligned} f : \quad E &\longrightarrow E \\ (x_n)_{n \geq 0} &\longmapsto (x'_n)_{n \geq 0} \end{aligned}$$

avec $x'_n = x_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer que f est un endomorphisme de E .

Vérifier que f est injectif si, et seulement si, $\alpha_0 \neq 0$.

4. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$. Montrer que la suite géométriques $(\lambda^n)_{n \geq 0}$ est dans E si, et seulement si, λ vérifie l'équation :

$$\lambda^{p+1} - \alpha_p \lambda^p - \dots - \alpha_1 \lambda - \alpha_0 = 0 \quad (2)$$

5. On suppose que l'équation (2) admet $p+1$ racines distinctes $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_p$. Montrer que les suites $(\lambda_0^n)_{n \geq 0}, (\lambda_1^n)_{n \geq 0}, \dots, (\lambda_p^n)_{n \geq 0}$ forment une base de E .
En déduire les suites $(x_n)_{n \geq 0}$ réelles vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+3} = 6x_n - 11x_{n+1} + 6x_{n+2} \quad (3)$$

6. On suppose que λ est une solution double de (2). Montrer que la suite $(n\lambda^n)_{n \geq 0}$ est aussi dans E .
En déduire les suites réelles vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad x_{n+3} = 5x_n - 8x_{n+1} + 4x_{n+2} \quad (4)$$

7. On suppose que λ est solution d'ordre $p+1$ de (2). Vérifier que les suites

$$(\lambda^n)_{n \geq 0}, (n\lambda^n)_{n \geq 0}, \dots, (n^p \lambda^n)_{n \geq 0}$$

forment une base de E .

En déduire la solution générale de (1).

• • • • •