

Devoir libre n°1  
à rendre le 23/09/2013

• • • • •

- Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $\mathbb{R}$ . Si  $(a, b) \in E^2$ , on appelle segment d'extrémités  $a$  et  $b$ , et on note  $[a, b]$ , l'ensemble des vecteurs  $ta + (1 - t)b$  lorsque  $t$  décrit  $[0, 1]$ .
  - Une partie  $A$  de  $E$  est dite convexe si  $\forall(a, b) \in A^2, [a, b] \subset A$ .
  - Soit  $A$  une partie convexe de  $E$ ,  $a$  un élément de  $A$ . On dit que  $a$  est extrémal dans  $A$  si la partie  $A \setminus \{a\}$  est convexe. On note  $\mathcal{E}(A)$  l'ensemble des éléments extrémaux de  $A$ .
1. Soit  $A$  une partie convexe de  $E$ ,  $a$  un élément de  $A$ . Soit  $\mathcal{P}_a$  l'énoncé :

$$\forall(a_1, a_2) \in A^2, a = \frac{1}{2}(a_1 + a_2) \Rightarrow a_1 = a_2$$

- (a) Montrer que  $a \in \mathcal{E}(A) \Rightarrow \mathcal{P}_a$ .
  - (b) Montrer que  $a \notin \mathcal{E}(A) \Rightarrow \exists(a_1, a_2) \in A^2, a_1 \neq a_2$  et  $\exists t \in ]0, 1[$  tel que  $a = ta_1 + (1 - t)a_2$ .
  - (c) En déduire l'équivalence :  $a \in \mathcal{E}(A) \Leftrightarrow \mathcal{P}_a$ .
2. Soit  $\rho$  une norme sur  $E$ .  $B_\rho = \{x \in E / \rho(x) \leq 1\}$  désigne la boule unité fermée de  $(E, \rho)$  et  $S_\rho = \{x \in E / \rho(x) = 1\}$  la sphère unité.
- (a) Montrer que  $B_\rho$  est convexe.
  - (b) Montrer que  $\mathcal{E}(B_\rho) \subset S_\rho$ .
  - (c) Soient  $(a_1, a_2) \in B_\rho$  distincts. Montrer que, si  $a = \frac{1}{2}(a_1 + a_2)$  appartient à  $S_\rho$ , alors  $a_1 \in S_\rho$  et  $a_2 \in S_\rho$ . En déduire l'équivalence :
 
$$\mathcal{E}(B_\rho) \neq S_\rho \iff \exists(a, b) \in S_\rho^2, a \neq b, \text{ tels que } [a, b] \subset S_\rho.$$
  - (d) Donner un exemple simple où  $\mathcal{E}(B_\rho) \neq S_\rho$  ( on pourra considérer  $E = \mathbb{R}^2$  muni d'une norme convenable ).
3. Dans cette question,  $E = \mathbb{R}^n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ).  $E$  est muni de la norme euclidienne canonique définie par :

$$\|(x_1, x_2, \dots, x_n)\|_2 = \left( \sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

$C$  désigne une partie convexe de  $\mathbb{R}^n$ , fermée, bornée, d'intérieur non vide, et symétrique ( c'est-à-dire  $\forall x \in C, -x \in C$  ).

- (a) Montrer que  $C$  est un voisinage de 0.
- (b) Soit  $x \in \mathbb{R}^n$ . Déduire de la question précédente que l'ensemble  $\{\lambda \in \mathbb{R}_*^+ / x \in \lambda C\}$  n'est pas vide (  $\lambda C$  désignant l'ensemble  $\{\lambda c / c \in C\}$  ).  
On pose alors, pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $j_C(x) = \inf\{\lambda \in \mathbb{R}_*^+ / x \in \lambda C\}$ .
- (c) Montrer que  $j_C$  est une norme sur  $\mathbb{R}^n$ .
- (d) On note  $B_{j_C} = \{x \in \mathbb{R}^n / j_C(x) \leq 1\}$ . Montrer que  $\overset{\circ}{B}_{j_C} \subset C \subset B_{j_C}$ . En déduire que  $B_{j_C} = C$ .

• • • • •