

Devoir libre n°3
à rendre le 11/11/2013

• • • • •

NOTATIONS ET OBJECTIFS

- Soit n un entier, $n \geq 2$; on note $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ la $\mathbb{R}$ -algèbre des matrices carrées d'ordre n à coefficients réels, et $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel des formes linéaires sur E .
On rappelle que : $\dim(E) = \dim(E^*)$.
Les éléments de E sont notés $M = (m_{ij})$, la matrice élémentaire E_{ij} est la matrice de E dont les coefficients sont tous nuls à l'exception de celui qui se trouve sur la i -ème ligne et sur la j -ème colonne, qui vaut 1.
Lorsque A et B sont des éléments de E , on note $A \cdot B$ leur produit.
Si $M \in E$, on note $\text{Vect}(M)$ le sous-espace vectoriel engendré par M .
- L'objectif du problème est de montrer que chaque hyperplan vectoriel de E possède au moins une matrice inversible.
- Si $M = (m_{ij}) \in E$, on note $T(M)$ le réel $\sum_{k=1}^n m_{kk}$.
On définit ainsi une application T de E vers $\mathbb{R} : M \mapsto T(M)$.
A chaque matrice U de E , on associe :
 - L'application T_U de E vers $\mathbb{R} : M \mapsto T_U(M) = T(U \cdot M)$.
 - L'ensemble $H_U = \{M \in E \mid T(U \cdot M) = 0\}$.

PARTIE I : GÉNÉRALITÉS, EXEMPLES

1. Quelques propriétés.
 - (a) Montrer que T est une application linéaire.
 - (b) Pour $U \in E$, prouver que l'application T_U est dans E^* .
 - (c) Soit $U \in E$; reconnaître $\ker T_U$, et montrer que H_U est un sous-espace vectoriel de E .
2. Dans cette question seulement, on prend $n = 2$, et on pose $U = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.
 - (a) Écrire les quatre matrices élémentaires E_{ij} ; que peut-on dire de la famille $(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$ de $E = \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$?
 - (b) Montrer que H_U est l'ensemble des matrices de E dont la somme des quatre coefficients vaut 0.
 - (c) Trouver une matrice M de E telle que $T(U \cdot M) \neq 0$, et en déduire la dimension de $\text{Im} T_U$ puis la dimension de H_U .
 - (d) Montrer que H_U possède une matrice inversible.
La partie III propose une généralisation de ce résultat.

PARTIE II : QUELQUES RÉSULTATS UTILES POUR LA SUITE

1. Soit $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ des éléments de E .
 - (a) Montrer que $T(A \cdot B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ji} b_{ij}$.

(b) En déduire les identités suivantes :

$$(I_1) \quad T({}^t A.B) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} b_{ij} \quad .$$

$$(I_2) \quad T(B.A) = T(A.B)$$

2. Soit U dans E .

(a) Si U est la matrice nulle, déterminer $\dim H_U$.

(b) Si U n'est pas la matrice nulle, montrer que l'on peut trouver un couple d'entiers (i_0, j_0) tel que $T_U(E_{i_0 j_0}) \neq 0$.
En déduire $\dim H_U$.

3. Pour $(i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2$, on note $T_{ij} = T_{E_{ji}}$.

(a) Les indices k et l étant fixés, calculer $T_{ij}(E_{kl})$ en utilisant (I_1) .

(b) En déduire que les n^2 éléments T_{ij} de E^* permettent de définir une base de E^* .

4. Montrer que l'application φ de E vers $E^* : U \mapsto \varphi(U) = T_U$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

5. On considère un hyperplan vectoriel H de E .

(a) Quelle est sa dimension ?

(b) Soit A une matrice non nulle de E qui n'appartient pas à H , montrer que : $E = H \oplus \text{Vect}(A)$.

(c) Construire alors un élément l de E^* tel que $H = \ker l$.

(d) Prouver l'existence d'un élément U de E tel que $H = H_U$.

PARTIE III : LE RÉSULTAT GÉNÉRAL

Pour $1 \leq r \leq n$, on note $R_r = \sum_{i=1}^r E_{ii}$.

1. Soit $P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire $P = (p_{ij})$ avec

$$\begin{cases} p_{i+1 i} = 1 & 1 \leq i \leq n-1 \\ p_{1 n} = 1 \\ p_{ij} = 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

(a) Montrer que P est inversible.

(b) Prouver que P appartient à l'hyperplan H_{R_r} .

2. En déduire que chaque hyperplan vectoriel H de E possède au moins une matrice inversible.

Indication : lorsque $H = H_U$, avec U de rang r , on rappelle l'existence de matrices S_1 et S_2 inversibles telles que $S_1.U.S_2 = R_r$.

FIN DE L'ÉPREUVE