

Devoir libre n°5
à rendre le 06/01/2014

• • • • •

QUELQUES PROPRIÉTÉS DE L'EXPONENTIELLE DE MATRICES

$\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n de termes réels ; n est un entier, $n \geq 1$. L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ sera muni de la norme euclidienne, c'est-à-dire, pour tout $X = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\|X\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

L'espace vectoriel $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ sera muni de la norme définie par :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \|A\| = \sup_{X \neq 0} \frac{\|AX\|}{\|X\|}.$$

1. Montrer que pour tout couple de matrices A et B de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on a

$$\|AB\| \leq \|A\| \|B\|.$$

2. Soient A et B deux matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- (a) Établir que la série de matrices de terme général $U_k = \frac{A^k}{k!}$ avec $k \in \mathbb{N}$ est convergente.

Soit $\exp(A)$ la somme de cette série : $\exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$.

- (b) Démontrer l'inégalité : $\|\exp(A)\| \leq \exp(\|A\|)$

- (c) Établir la relation : $B \exp(A) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B A^k$.

Quelle conclusion y-a-t-il lieu d'en tirer sur les matrices $\exp(A)$ et $\exp(A_2)$, lorsque A_1 et A_2 sont deux matrices semblables ?

3. (a) Montrer que si deux matrices A et B commutent, alors :

$$\exp(A+B) = \exp(A) \exp(B)$$

- (b) Soient les trois matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}, \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Calculer $\exp(D)$ et $\exp(F)$; comparer $\exp(E)$ et le produit $\exp(D) \exp(F)$.

4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

- (a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$ et tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\|(A+H)^k - A^k\| \leq (\|A\| + \|H\|)^k - \|A\|^k.$$

- (b) En déduire que pour tout $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\|\exp(A+H) - \exp(A)\| \leq e^{\|A\|} (e^{\|H\|} - 1),$$

puis que l'application exponentielle est continue sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

5. Soit f_A la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $f_A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} A^k$.

- (a) Établir que f_A est continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
- (b) Exprimer, en fonction de $f_A(x)$ et de I_n , l'expression de $A \cdot \int_0^x f_A(t) dt$ où x est un réel ; en déduire que la fonction f_A est dérivable et calculer sa dérivée.
Montrer que f_A est indéfiniment dérivable.
6. (a) Soit θ un réel et soit C_θ la matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : C_\theta = \begin{pmatrix} 0 & \theta \\ -\theta & 0 \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(C_\theta)$. Est-ce que l'application $A \mapsto \exp(A)$ de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est injective ?
- (b) Soit A une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.
Démontrer que la matrice $\exp(A) - I_n$ peut s'écrire $A(I_n + S_A)$. Établir qu'il existe un réel α ($\alpha > 0$) tel que $\|A\| < \alpha$ implique $\|S_A\| < 1$.
- (c) Soit T une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$; établir que si $\|T\| < 1$, la matrice $I_n + T$ est inversible (démontrer par exemple que le seul vecteur X de $\mathbb{R}^n$ tel que $(I_n + T)X$ est nul, est le vecteur nul).
- (d) Soit M une matrice appartenant à la boule ouverte $B(O, \alpha)$ de centre la matrice nulle O et de rayon α ; α est le réel défini dans à l'alinéa (b) ; établir que l'égalité entre les matrices $\exp(M)$ et I_n est équivalente à la nullité de M .
7. Soient B et H deux matrices données de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et soit k un entier, $k \geq 1$; soit g_k l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par :

$$g_k(x) = (B + xH)^k.$$

Les deux matrices B et H ne sont pas supposées commutables.

- (a) Établir que la fonction g_k est continûment dérivable ; calculer les dérivées des fonctions g_1, g_2, g_3 puis de la fonction g_k .
- (b) En déduire l'inégalité :
- $$\|(B + H)^k - B^k\| \leq k\|H\|(\|B\| + \|H\|)^{k-1}.$$
8. Soit x un réel, $x > 0$; soit $T(A, x)$ la matrice définie par la relation :

$$T(A, x) = \frac{1}{x^2}(\exp(xA) - I_n - xA).$$

- (a) Démontrer que la fonction $x \mapsto T(A, x)$ se prolonge par continuité en 0. Donner un majorant simple de sa norme en utilisant l'expression de $T(A, x)$ au moyen d'une intégrale (par exemple).
- (b) Soit k un entier, $k \geq 1$; en remarquant la relation :

$$\left(I_n + \frac{1}{k}A\right)^k - \exp(A) = \left[\exp\left(\frac{1}{k}A\right) - \frac{1}{k^2}T\left(A, \frac{1}{k}\right)\right]^k - \left[\exp\left(\frac{1}{k}A\right)\right]^k$$

et en utilisant l'inégalité établie en 6., déterminer la limite de la suite de matrices de terme général :

$$\left(I_n + \frac{1}{k}A\right)^k, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

- (c) Démontrer que l'application $A \mapsto \det A$ est une application continue de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dans $\mathbb{R}$.
Déterminer le développement limité en $\frac{1}{k}$ de $\det\left(I_n + \frac{1}{k}A\right)$, contenant les deux premiers termes.
En déduire la valeur du déterminant de la matrice $\exp(A)$.

• • • • •