

Devoir libre n°6
à rendre le 29/01/2014

• • • • •

RAPPEL : On dit que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ est convergente si, et seulement si, $\int_a^b f(t)dt$ a une limite (notée aussi $\int_a^{+\infty} f(t)dt$) quand b tend vers l'infini. On dit plus précisément que l'intégrale est semi-convergente si elle est convergente sans que f soit intégrable sur $[a, +\infty[$.

Pour $\alpha \in \mathbb{R}^+, t \in \mathbb{R}$, on définit la fonction $f_{\alpha,t} : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ par $f_{\alpha,t}(x) = \frac{x^\alpha e^{-tx}}{1+x^2}$

- Déterminer l'ensemble C des couples (α, t) pour lesquels $f_{\alpha,t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$. Si $(\alpha, t) \in C$, on pose $\Phi_\alpha(t) = \int_0^{+\infty} f_{\alpha,t}(x)dx$ définissant ainsi une application Φ_α d'un intervalle de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
- Montrer que Φ_0 est de classe $\mathcal{C}^{+\infty}$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, continue sur $\mathbb{R}^+$ et vérifie

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \Phi_0(t) + \Phi_0''(t) = \frac{1}{t} \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi_0(t) = 0$$

- Montrer qu'il existe exactement une fonction ϕ qui vérifie $\forall t \in \mathbb{R}^{+*}, \phi(t) + \phi''(t) = \frac{1}{t}$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = 0$.
- Soient u et X tels que $0 < u < X$ et v un réel. Montrer que

$$\int_u^X \frac{\sin(x-v)}{x} dx = \frac{\cos(u-v)}{u} - \frac{\cos(X-v)}{X} - \int_u^X \frac{\cos(x-v)}{x^2} dx$$

En déduire que, pour tout $u \in \mathbb{R}^{+*} \times \mathbb{R}$, l'intégrale $\int_u^{+\infty} \frac{\sin(x-v)}{x} dx$, notée $F(u, v)$, est convergente et égale à $\frac{\cos(u-v)}{u} - \int_u^{+\infty} \frac{\cos(x-v)}{x^2} dx$.

- Soit ρ une application continue de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ telle que l'intégrale $\int_1^{+\infty} \rho(t)dt$ converge. On définit l'application $R : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{R}$ par $R(s) = \int_s^{+\infty} \rho(y)dy$.

Montrer que R est de classe $\mathcal{C}^1$ et vérifie $R'(s) = -\rho(s)$

Montrer que la fonction f définie sur $\mathbb{R}^{+*}$ par $f(t) = F(t, t)$ est indéfiniment dérivable et vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R}^{+*} \quad f(t) + f''(t) = \frac{1}{t} \quad f(t) = \frac{1}{t} - \int_0^{+\infty} \frac{\cos(x)}{(t+x)^2} dx \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = 0$$

- Montrer brièvement la semi-convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$.

Montrer que, pour tout $t > 0$, $\left| f(t) - \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx \right| \leq t \left(1 + \ln\left(1 + \frac{1}{t}\right) \right)$

En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx = \frac{\pi}{2}$ et calculer $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(x)}{x^2} dx$ et $\int_0^{+\infty} \frac{\sin^4(x)}{x^4} dx$

- Pour $t \in \mathbb{R}$, on pose : $G(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x(1+x^2)} dx$.

Montrer que $G(t) = \frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \frac{x \sin(x)}{t^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} - \int_0^{+\infty} \frac{t^2 - x^2}{(t^2 + x^2)^2} \cos(x) dx$.

En déduire $\lim_{t \rightarrow +\infty} G(t) = \frac{\pi}{2}$.

Montrer que G est une fonction bornée de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ lipschitzienne de rapport $\frac{\pi}{2}$.