

Devoir libre n°7
à rendre le 13/02/2014

(I)

Soit f la fonction d'une variable réelle définie par

$$x \mapsto f(x) = \ln(4 + x^2 - 4x \cos \theta),$$

où θ représente un nombre réel donné.

1. Étudier l'ensemble de définition E de f en fonction de la valeur θ .
2. (a) Démontrer que f est indéfiniment dérivable dans E .
(b) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
(c) Prouver que la dérivée d'ordre n , $f^{(n)}(x)$ au point $x \in E$ se présente sous la forme

$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{(4 + x^2 - 4x \cos \theta)^n},$$

où P_n est un polynôme dont on précisera le degré.

3. (a) Donner, pour $n \in \mathbb{N}$, la valeur au point x de la dérivée d'ordre $(n + 1)$ de la fonction
$$x \mapsto g(x) = (4 + x^2 - 4x \cos \theta)f'(x).$$

(b) En déduire, pour tout $n \geq 1$, une relation entre $P_n(x)$, $P_{n+1}(x)$ et $P_{n+2}(x)$.
4. (a) $\theta \in \mathbb{R}$ et $x \in E$ étant deux nombres réels donnés, trouver toutes les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ de nombres réels telles que

$$\forall n \geq 1, \quad u_{n+2} = -(2x - 4 \cos \theta)u_{n+1} - (4 + x^2 - 4x \cos \theta)u_n.$$

- (b) Donner celle de ces suites dont les deux premiers termes sont

$$u_1 = 2x - 4 \cos \theta, \quad u_2 = -2x^2 + 8x \cos \theta - 8 \cos(2\theta).$$

5. (a) Expliciter complètement $P_n(x)$ pour n quelconque.
(b) Donner les valeurs de $P_n(0)$ et $f^{(n)}(0)$.

(II)

1. (a) Démontrer que, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, la fonction

$$x \mapsto \varphi_1(x) = \frac{1}{2e^{i\theta} - x}$$

est développable en série entière en x sous la forme

$$\varphi_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(\theta)x^n.$$

On donnera l'expression de $v_n(\theta)$ ainsi que le rayon de convergence de la série entière.

- (b) Écrire de même le développement en série entière en x de la fonction

$$x \mapsto \varphi_2(x) = \frac{1}{2e^{-i\theta} - x}.$$

2. (a) Dédurre des résultats précédents que la fonction f définie dans la section (I) est développable en série entière en x , de rayon de convergence non nul.
(b) Écrire son développement et l'utiliser pour retrouver la valeur de $f^{(n)}(0)$ calculée au (I), 5.

• • • • •