Devoir libre $n°1$
à rendre le 29/09/2014

• • • • • • • • •

Exercice 1 On pose $Z[i\sqrt{3}] = \{a + ib\sqrt{3}/(a,b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}\}$.

1. Montrer que $Z[i\sqrt{3}]$ est un anneau.
2. Pour $x = a + ib\sqrt{3}$ on pose $N(x) = a^2 + 3b^2$, montrer que :
   (a) $N(xy) = N(x)N(y)$ pour tout $(x,y) \in \mathbb{Z}[i\sqrt{3}] \times \mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$.
   (b) x est inversible dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$ si, et seulement si, $N(x) = 1$, en déduire tous les éléments inversibles de $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$.
   (c) $N(x)$ est différent de 2 pour tout x de $\mathbb{Z}[i\sqrt{3}]$.
3. Pour tout x de $\{1 + i\sqrt{3}, 1 - i\sqrt{3}, 2\}$ montrer que :

$$x = yz \text{ entraîne } y \text{ est inversible ou } z \text{ est inversible.}$$

Exercice 2 Recherche des idéaux de quelques anneaux classiques.

1. Soit G un groupe additif de l'anneau $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$ des entiers modulo n où n est un entier supérieure ou égal à 2.
   (a) Montrer qu'il existe un diviseur p de n tel que G soit le sous-groupe engendré par la classe de p.
   (b) Montrer que G est un idéal de $\mathbb{Z}/_{n\mathbb{Z}}$.
2. Soit p un entier premier donné. Considérons $\mathbb{Z}_p$ l'ensemble des nombres rationnels $\dfrac{m}{n}$ tels que n ne soit pas multiple de p.
   (a) Vérifier que l'ensemble Z_p muni des lois usuelles est un anneau.
   (b) Soit G un idéal de $\mathbb{Z}_p$. Prouver qu'il existe un entier $r \geq 0$ tel que $G \cap \mathbb{Z} = r\mathbb{Z}$, et en déduire que $G = r\mathbb{Z}_p$.

Exercice 3 Soit K une partie de $\mathbb{R}^d$ contenant 0 dans son intérieur. Pour $x \in \mathbb{R}^d$, on pose

$$j_K(x) = \inf\left\{\alpha > 0 / \frac{x}{\alpha} \in K\right\}.$$

1. Justifier la définition, et montrer qu'on a $j_K(\lambda x) = \lambda j_K(x)$ pour tout $\lambda \geq 0$.
2. On suppose que K est borné. Montrer que $j_K(x) = 0$ si et seulement si $x = 0$.
3. Montrer que si K est convexe, alors $j_K(x + y) \leq j_K(x) + j_K(y)$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}^d$. (Commencer par montrer que si $\frac{x}{\alpha} \in K$ et $\frac{y}{\beta} \in K$, alors $\dfrac{x+y}{\alpha+\beta} \in \mathbb{K}$).
4. On suppose que K est compact, convexe et symétrique par rapport à 0.
   Montrer que j_K est une norme sur $\mathbb{R}^d$, et que K est la boule unité fermée de la norme j_K.

• • • • • • • • • •