Devoir libre n°2
à rendre le 16/10/2014

Dans tout le problème, on désigne par K le sous-ensemble de $\mathbb{R}$:

$$K = \{0\} \cup \left\{ x \in \mathbb{R} / \exists n \in \mathbb{N}^*, x = \frac{1}{n} \right\}.$$

1. Démontrer que K est une partie compacte de $\mathbb{R}$.
2. Soit f une application de K dans $\mathbb{R}$. Démontrer que f est continue si, et seulement si, la suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ de terme général $u_n = f\left(\frac{1}{n}\right)$ est convergente et a pour limite $f(0)$.
3. Soit $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ des applications continues de K dans $\mathbb{R}$.
 - (a) Pour tout $f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$, on pose $\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)|$. Démontrer que $f \mapsto \|f\|$ est une norme sur $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$.
 - (b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : K \rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\begin{cases} f_n(0) = 0, \\ f_n\left(\frac{1}{p}\right) = 1 - \frac{n}{p} \text{ si } n < p, \\ f_n\left(\frac{1}{p}\right) = 0 \text{ si } n \geq p > 0. \end{cases}$$

Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ et que la suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge simplement sur K vers une fonction f , que l'on déterminera. Montrer que f n'est pas continue.

- (c) Soit $\mathcal{B}$ la boule unité de centre 0 de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$. Démontrer que, $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n \in \mathcal{B}$ et déduire de la question b) que $\mathcal{B}$ n'est pas compacte.
4. On désigne par $\mathcal{F}$ l'ensemble des $f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ pour lesquelles il existe un voisinage U de 0 dans K tel que f soit constante sur U (le voisinage U dépend de f).
 - (a) Démontrer que $\mathcal{F}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$.
 - (b) Démontrer que $\mathcal{F}$ est dense dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$.
5. On désigne par $\mathcal{H}$ l'ensemble des $f \in \mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ telles que $f(0) = 0$.
 - (a) Démontrer que $\mathcal{H}$ est un sous-espace vectoriel fermé de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$.
 - (b) Soit g la fonction de K dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{K}, g(x) = 1.$$

On désigne par $\mathcal{G}$ le sous-espace vectoriel (de dimension 1) engendré par g dans $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$.
Démontrer que $\mathcal{C}(K, \mathbb{R}) = \mathcal{H} \oplus \mathcal{G}$.

- (c) Démontrer que la projection P de $\mathcal{C}(K, \mathbb{R})$ sur $\mathcal{H}$, parallèlement à $\mathcal{G}$, est continue.

FIN DE L'ÉPREUVE