Devoir libre $n°3$
à rendre le 10/11/2014

Fonctions implicites et applications

On rappelle le théorème du point fixe suivant : *Soit* $(E, \|.\|)$ *un espace vectoriel normé complet, A une partie fermée de E, et $T : A \longrightarrow A$ une contraction stricte, c'est-à-dire qu'il existe une constante $k < 1$ telle que*

$$\forall x, y \in A, \ \ \|T(x) - T(y)\| \leq k\|x - y\|.$$

Alors T admet un point fixe unique $x_0 = T(x_0)$. De plus, pour tout $z \in A$, la suite des itérés $T^m(z)$ converge vers x_0 quand m tend vers $+\infty$.

Partie I

On considère un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ muni de la norme euclidienne, et f une application de classe $\mathscr{C}^1$ sur U, à valeurs réelles.
On suppose qu'il existe un point (a, b) de U tel que $f(a, b) = 0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a, b) \neq 0$. On définit enfin une fonction g sur U à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$g(x, y) = y - \frac{1}{\frac{\partial f}{\partial y}(a, b)} f(x, y).$$

1. Montrer que la fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U et calculer $\dfrac{\partial g}{\partial y}$ en fonction des dérivées partielles de f.
2. Montrer qu'il existe un réel $r > 0$ tel que la boule B fermée de centre (a, b) et de rayon $2r$ soit incluse dans U et tel que
$$\forall (x, y) \in B, \ \ \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right| \leq \frac{1}{2}.$$
3. En déduire que, pour tout $(x, y) \in B$ et tout $(x, y') \in B$,
$$|g(x, y') - g(x, y)| \leq \frac{1}{2}|y - y'|.$$
4. Montrer qu'il existe un intervalle ouvert I contenant a tel que $I \times [b - r, b + r] \subset U$ et tel que
$$\forall x \in I, \ \ |g(x, b) - g(a, b)| \leq \frac{r}{2}.$$
5. Déduire de deux dernières inégalités que
$$\forall (x, y) \in I \times [b - r, b + r], \ \ g(x, y) \in [b - r, b + r].$$
6. Montrer que pour tout $x \in I$ fixé, l'application $y \longmapsto g(x, y)$ est une application contractante sur $[b - r, b + r]$.
7. Montrer que pour tout $x \in I$, il existe un unique $y \in [b - r, b + r]$ tel que $f(x, y) = 0$. Ce y sera noté $\varphi(x)$ et on admet que l'application φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.
8. Calculer la dérivée de l'application $x \longmapsto f(x, \varphi(x))$ sur I. En déduire l'expression de la dérivée de φ en fonction des dérivées partielles de f.

Partie II

Soit f et F deux fonctions définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et de classe $\mathscr{C}^1$ sur cet ouvert. On cherche les extrema de la fonction F restreinte à l'ensemble $\{(x,y) \in U / f(x,y)=0\}$. Une solution de ce problème sera appelé extremum de F lié par la relation $f(x,y)=0$.

1. Soit (a,b) un point de U tel que $f(a,b)=0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(a,b) \neq 0$.

(a) Montrer qu'il existe un ouvert V de $\mathbb{R}^2$ contenant (a,b) et contenu dans U, un intervalle I de $\mathbb{R}$ contenant a et une application φ de classe $\mathscr{C}^1$ sur I tels que

$$((x,y) \in V,\ \ f(x,y)=0) \Longleftrightarrow (x \in I,\ \ y=\varphi(x))$$

(b) Montrer que si (a,b) est un extremum de F lié par la relation $f(x,y)=0$, alors

$$\frac{\partial F}{\partial x}(a,b)\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) - \frac{\partial F}{\partial y}(a,b)\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = 0.$$

(c) La réciproque est-elle vraie ?

2. On suppose maintenant que le point (a,b) vérifie $f(a,b)=0$ et $\dfrac{\partial f}{\partial x}(a,b) \neq 0$. Montrer que l'implication de la question II.1.(b) est encore vraie.

Partie III

On considère les sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ suivantes :

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 2x^2 + y^2 - 2y \leq 1\}$$

$$\widetilde{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / 2x^2 + y^2 - 2y < 1\}$$

On remarquera que D est un ensemble fermé et que $\widetilde{D}$ est un ensemble ouvert.

1. Dessiner sommairement l'ensemble D.

2. Montrer que l'ensemble D est borné.

3. On considère la fonction F définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = x^2 e^y.$$

Montrer que F admet un maximum global et minimum global sur D.

4. Chercher les extrema locaux de F sur $\widetilde{D}$.

5. Déterminer les extrema globaux de F sur D.

Partie IV

Trouver le triangle rectangle d'aire maximale ayant un périmètre l fixé (On pourra utiliser les résultats de la partie II).

• • • • • • • • • • •