Devoir libre $n°4$
à rendre le 20/11/2015

Soit k un entier pair supérieur ou égal à deux. On note E_k le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des polynômes homogènes à deux variables de degré k à coefficients complexes, considérés comme applications de $\mathbb{C}^2$ dans $\mathbb{C}$. C'est a dire les polynômes de deux variables de la forme

$$P(X,Y) = \sum_{i=0}^{k} a_i X^i Y^{k-i}, \ \ \forall i \in [\![0,k]\!] \ \ a_i \in \mathbb{C}.$$

On damet que $P(X,Y) = 0$ si, et seulement si, $\forall i, \ \ a_i = 0$. On note E_k^0 le sous-espace vectoriel de E_k formé des polynômes P de E_k vérifiant $P(X,0) = 0$.
Soit $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ l'ensemble des matrices $(2,2)$ à coefficients complexes. Soit A un élément de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$ et f_A l'endomorphisme de $\mathbb{C}^2$ dont la matrice sur la base canonique est A. Pour tout P dans E_k on pose

$$[P|A] = P \circ f_A.$$

Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on aura donc

$$[P|A](X,Y) = P(aX+bY, cX+dY).$$

On note P_0 le polynôme de E_k défini par $P_0(X,Y) = X^k - Y^k$. Considérons les matrices $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et posons

$$\mathscr{A}_k = \{P \in E_k / [P|S] + P = 0\}$$

et

$$\mathscr{B}_k = \{P \in E_k / [P|STST] + [P|ST] + P = 0\}.$$

1. Soit A et B deux éléments de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$. Montrer que l'application $P \mapsto [P|A]$ est un endomorphisme de E_k et que $[P|AB] = [[P|A]|B]$.
2. (a) Calculer S^2, ST, $(ST)^2$ et $(ST)^3$.
   (b) Vérifier que $P_0 \in \mathscr{A}_k \cap \mathscr{B}_k$.
3. Montrer que l'application $P \mapsto [P|T] - P$ est une application linéaire surjective de E_k dans E_k^0.
4. Soit P un élément de E_k. Montrer qu'il existe un élément Q de E_k et un élément Q de E_k et un nombre complexe a tels que

$$P = aP_0 + (Q - [Q|S]) + ([Q|ST] - Q).$$

5. En déduire que $E_k = \mathscr{A}_k + \mathscr{B}_k$.
6. Expliciter une base de $\mathscr{A}_k$ et calculer la dimension de $\mathscr{A}_k$.
7. (a) Diagonaliser la matrice ST.
   (b) En déduire la diagonalisation de l'endomorphisme $P \mapsto [P|ST]$ de E_k.

Fin de l'épreuve