Devoir libre n°5
à rendre le 11/12/2014

Sont n un entier supérieur ou égal à 1 ($n \geq 1$). L'espace vectoriel euclidien $\mathbb{R}^n$ est muni de la norme euclidienne canonique, définie par

$$\|x\| = \|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Muni de la distance associée à cette norme, définie par $d(x, y) = \|x - y\|$, c'est un espace métrique. On notera $(x|y)$ le produit scalaire de x et y .

On rappelle qu'une partie A de $\mathbb{R}^n$ est dite convexe si, chaque fois qu'elle contient deux points a et b , elle contient le segment $[a, b]$ qui les joint (c'est-à-dire l'ensemble des $ta + (1 - t)b$, t décrivant l'intervalle $[0, 1]$ de $\mathbb{R}$).

1. Montrer l'identité :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2) \quad (1)$$

En déduire que si a, b et c sont trois points de $\mathbb{R}^n$, m désignant le milieu de $[b, c]$ (c'est-à-dire $m = \frac{b + c}{2}$), on a :

$$\|a + b\|^2 - \|a - c\|^2 = 2\|a - m\|^2 + \frac{1}{2}\|b - c\|^2 \quad (2)$$

2. La distance d'un point a à une partie fermée A d'un espace métrique étant définie par $d(a, A) = \inf_{x \in A} d(a, x)$, une projection de a sur A est un point α de A tel que $d(a, A) = d(a, \alpha)$.

On se propose de démontrer que si A est une partie convexe, fermée, non vide de $\mathbb{R}^n$, alors chaque point a de $\mathbb{R}^n$ a une projection et une seule sur A .

Pour cela, a étant un point quelconque de $\mathbb{R}^n$, considérer une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de points de A telle que $d(a, x_p)$ tende vers $d(a, A)$ pour p tendant vers l'infini, et utiliser la question précédente pour établir que la suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy.

Conclure, en justifiant clairement chaque étape du raisonnement.

3. On vient de définir le projecteur sur le convexe fermé non vide A , application qui sera notée P_A dans la suite, par :

- (i) $P_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$;
- (ii) $\forall x \in \mathbb{R}^n, P_A(x) \in A$;
- (iii) $\forall y \in A, \|x - P_A(x)\| \leq \|x - y\|$.

Le but de cette question est d'établir une nouvelle caractérisation de la projection $P_A(x)$ du point x sur A , soit :

$$\forall y \in A, (x - P_A(x) | P_A(x) - y) \geq 0 \quad (3)$$

(a) Montrer que cela équivaut à montrer l'égalité des ensembles E_1 , et E_2 définis par :

$$\begin{aligned} E_1 &= \{z \in A / \forall y \in A, \|x - z\| \leq \|x - y\|\} \\ E_2 &= \{z \in A / \forall y \in A, (x - z | z - y) \geq 0\}. \end{aligned}$$

(b) Montrer cette égalité. On pourra commencer par établir l'identité

$$\|x - y\|^2 - \|x - z\|^2 = 2(x - z|z - y) + \|z - y\|^2 \quad (4)$$

et en déduire directement l'inclusion $E_2 \subset E_1$. Pour prouver l'inclusion inverse, on pourra écrire (4) en remplaçant y par $y_t = ty + (1 - t)z$ où $0 \leq t \leq 1$.

4. Montrer que l'inégalité (3) est encore équivalente à la suivante

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n, (x - P_A(x)|P_A(x) - P_A(y) \geq 0.$$

5. On rappelle qu'un cône de sommet 0 (dans $\mathbb{R}^n$) est un ensemble C invariant par toute homothétie strictement positive ; c'est-à-dire $\forall \lambda > 0, \lambda C = C$. On définit, à partir d'un cône C de sommet 0, l'ensemble polaire de C , note $C^\perp$, par :

$$C^\perp = \{x^\perp \in \mathbb{R}^n / \forall x \in C, (x|x^\perp) \leq 0\}$$

(a) Montrer que $C^\perp$ est un cône de sommet 0 convexe et fermé.

(b) Si C est un sous-espace de $\mathbb{R}^n$, que trouve-t-on par l'opération $\perp$?

6. Soit C un cône convexe fermé de sommet 0 et $C^\perp$ son cône polaire. On se propose de montrer le théorème suivant :

Tout point x de l'espace $\mathbb{R}^n$ peut s'écrire, de façon unique, $x = y + y^\perp$ avec $y \in C, y^\perp \in C^\perp$ et $(y|y^\perp) = 0$.

(a) Montrer tout d'abord l'unicité de la décomposition, dont on supposera ici l'existence, et qu'elle est nécessairement de la forme :

$$x = P_C(x) + P_{C^\perp}(x).$$

(b) Montrer que $x - P_C(x)$ est un élément de $C^\perp$ et en déduire une décomposition de x en une somme de deux vecteurs appartenant respectivement à C et $C^\perp$.
Montrer, pour achever la démonstration du théorème, que ces deux vecteurs sont orthogonaux (on pourra utiliser l'inégalité (3)).

Fin de l'épreuve