Devoir libre $n°6$
à rendre le 04/01/2015

I-TRANSFORMATION D'ABEL

Soient $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles. On s'interesse ici à la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$.

Pour tout entier naturel n, on pose $B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$.

1. (a) Vérifier que $B_0 = b_0$ et $\forall n \geq 1$, $b_n = B_n - B_{n-1}$.

(b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = a_n B_n + \sum_{k=0}^{n-1} (a_k - a_{k+1}) B_k$.

2. On suppose que la suite $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

(a) Montrer que la suite $(a_n B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

(b) On suppose de plus que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n - a_{n+1})$ est absolument convergente, montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (a_n - a_{n+1}) B_n$ est absolument convergente et en déduire la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$

3. Établir que si la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante de limite nulle et $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n b_n$ converge.

4. Énoncer et démontrer un critère garantissant la convergence d'une série alternée.

II-APPLICATION À L'ÉTUDE D'UNE SÉRIE TRIGONOMÉTRIQUE

Pour tout réel x et tout entier naturel $n \geq 1$, on pose

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \sin(kx) \text{ et } C_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \cos(kx).$$

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$,

$$C_n(x) + iS_n(x) = \frac{1 - e^{inx}}{1 - e^{ix}} e^{ix},$$

et que

$$\frac{1}{2} + C_n(x) = \frac{\sin(2n+1)\frac{x}{2}}{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)} \text{ et } S_n(x) = \frac{\sin(n+1)\frac{x}{2}\sin n\frac{x}{2}}{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}.$$

2. En déduire alors que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$, la suite $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée et établir la convergence de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{\sin(nx)}{n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Dans la suite on pose $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}$, $x \in \mathbb{R}$, et on cherche à calculer la somme de cette série.

3. (a) Vérifier que f est impaire et 2π-périodique.

(b) Soit $x \in]0, 2\pi[$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin(kx)}{k} = \frac{\pi - x}{2} - \frac{1}{2}\int_{\pi}^{x} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t.$$

4. Soit $x \in]0, \pi[$. Pour tout $t \in [x, \pi]$, on pose $h(t) = \dfrac{1}{\sin(\frac{t}{2})}$.

(a) Vérifier que h est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[x, \pi]$ et que h' y est bornée.

(b) Vérifier la formule

$$\int_{x}^{\pi} h(t)\sin(n+\frac{1}{2})t\mathrm{d}t = \frac{2}{2n+1}\left(\frac{\cos(n+\frac{1}{2})x}{\sin(\frac{x}{2})} + \int_{x}^{\pi} h'(t)\cos(n+\frac{1}{2})t\mathrm{d}t\right).$$

(c) En déduire un majorant pour la valeur absolue de l'intégrale du premier membre et conclure que cette intégrale tend vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

(d) Établir alors que pour tout $x \in]0, 2\pi[$, $f(x) = \dfrac{\pi - x}{2}$.

III-CALCUL D'UNE INTÉGRALE

1. Établir la convergence de l'intégrale

$$I = \int_{0}^{1} \frac{\ln(1+t)}{t}\mathrm{d}t.$$

2. Justifiant soigneusement chaque étape du calcul, déterminer le terme général d'une série numérique convergente dont I est la somme.
Donner le réel auquel I est égal.

On admet que la somme de la série de terme général $\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^2}$, ≥ 1 *existe et vaut* $\dfrac{\pi^2}{12}$.

Fin de l'épreuve