Devoir libre $n°7$
à rendre le 27/01/2015

Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des fonctions numériques f, continues sur $\mathbb{R}^*$ et telles que $\lim\limits_{t\to 0} tf(t) = 0$ existe et finie. Soit $f \in E$, on définit sur $\mathbb{R}$ la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x \frac{(x^2-t^2)^n}{2^n n!} tf(t)dt$$

noté encore $F_{n+1}(f)(x)$, $n \in \mathbb{N}$.

1. Les fonctions $g : x \mapsto \dfrac{1}{e^x - 1}$ et $h : x \mapsto \dfrac{1}{x^2(x-1)}$ sont-elles dans E ?

2. Montrer que $f_1 \in E$ et que l'application :

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & E & \longrightarrow & E \\ & f & \longmapsto & \Phi(f) = f_1 \end{array}$$

est linéaire et injective. Est-elle surjective ?

3. Montrer, en intégrant par parties, que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ $f_{n+1} = F_n(f_1)$.
En déduire que $f_{n+1} = \Phi^{n+1}(f)$ et que $f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x tf_n(t)dt$, $n \in \mathbb{N}^*$.

4. On définit sur $\mathbb{R}$ la suite de fonctions $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $H_{n+1}(x) = \dfrac{2^n n!}{(x^2+1)^n} f_{n+1}(x)$, $n \in \mathbb{N}$, et pour tout réel x, on pose $M_x = \sup\limits_{|t|\leq|x|} |g(t)|$ où g est telle que $g(t) = tf(t)$ si $t \neq 0$ et $g(0) = \lim\limits_{t\to 0} tf(t)$.

(a) Montrer que

$$|H_{n+1}(x)| \leq \left(\frac{x^2}{x^2+1}\right)^n |x| M_x.$$

En déduire que la suite de fonctions $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge uniformément vers 0, sur tout intervalle borné.

(b) Montrer que la série de fonctions $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} H_{n+1}$ converge uniformément sur tout intervalle borné et que sa somme est égale à $\displaystyle\int_0^x \frac{x^2+1}{t^2+1} tf(t)dt$.

5. Soit la suite numérique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $v_n = \dfrac{1}{2^n} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2k+1} \mathtt{C}_n^k$, $n \in \mathbb{N}$.

(a) En considérant la fonction $f(t) = \dfrac{1}{t}$, $t \in \mathbb{R}^*$, montrer que $v_n = H_{n+1}(1)$.

(b) En déduire que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge et sa somme est égale à $\dfrac{\pi}{2}$.

• • • • • • • • • •