Devoir libre $n°8$
à rendre le 09/02/2015

CALCUL DE L'INTÉGRALE $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$. On note $\beta = \dfrac{1}{\alpha}$. Soit $u(\alpha)$ défini par : $u(\alpha) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dt}{1+t^\alpha}$. Pour tout $\theta \in]-\pi, \pi[$ et pour $n \geq 1$ on pose :

$$\phi(\theta) = \int_0^{+\infty} \frac{x^{\theta-1}}{1+xe^{i\theta}}dx \;\; et \;\; \phi_n(\theta) = \int_{\frac{1}{n}}^{n} \frac{x^{\theta-1}}{1+xe^{i\theta}}dx.$$

1. (a) Vérifier que ϕ est bien définie sur I. Exprimer $\phi(0)$ en fonction de $u(\alpha)$.

(b) Démontrer que la fonction ϕ_n est définie et continument dérivable sur I.

(c) Montrer que ϕ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I.

(d) Trouver à l'aide des résultats précédents une équation différentielles du premier ordre vérifiée par ϕ. En déduire l'expression de $\phi(\theta)$ en fonction de $\forall$, θ et $u(\alpha)$.

2. Démontrer que $\alpha u(\alpha)\sin(\beta\theta)$ s'exprime en fonction de $L(\theta)$ avec :

$$L(\theta) = \int_0^{+\infty} \frac{x^\beta \sin\theta}{1+2x\cos\theta+x^2}dx$$

3. On prend $\theta \in]0, \pi[$.

(a) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x^\beta \sin\theta}{1+2x\cos\theta+x^2}dx$.

(b) Démontrer que $\alpha u(\alpha)\sin(\beta\theta) - \theta = \sin\theta M(\theta)$ avec :

$$M(\theta) = \int_0^1 \frac{(1-x^\beta)^2}{x^\theta(1+2x\cos\theta+x^2)}dx.$$

(c) Démontrer que cette dernière intégrale est encore définie pour $\theta = \pi$.

(d) Déduire des résultats précédents :

$$|\alpha u(\alpha)\sin(\beta\theta) - \theta| \leq \frac{\sin(\theta)}{1-\beta}.$$

(e) En déduire la valeur de $u(\alpha)$.

●●●●●●●●●●