Devoir libre $n°9$
à rendre le 09/03/2015

● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ●

Exercice 1 *(Transformée de Laplace)* Soit une fonction continue $f : [0,+\infty[\to \mathbb{C}$. On suppose qu'il existe $C > 0$ et $a \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall t \in [0,+\infty[,\ \ |f(t)| \leq Ce^{at}.$$

On pose $\mathscr{L}f(z) = \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)e^{-zt}\mathrm{d}t$.

1. Montrer que $\mathscr{L}f$ est bien définie sur l'ouvert $\Omega = \{z \in \mathbb{C}/\mathrm{Re}(z) > a\}$.
2. Montrer que $\mathscr{L}f$ est holomorphe sur Ω et que pour tout $z \in \Omega$, on a :

$$(\mathscr{L}f)'(z) = -\int_0^{+\infty} tf(t)e^{-zt}\mathrm{d}t.$$

Exercice 2 Dans une population donnée, 15% des individus ont une maladie M_a. Parmi les individus atteints de la maladie M_a, 20% ont une maladie M_b et parmi les individus non atteints de la maladie M_a, 4% ont la maladie M_b.

1. On prend un individu au hasard et on désigne respectivement par A et B les événements suivants :

   " l'individu est atteint de la maladie M_a "
   " l'individu est atteint de la maladie M_b ".

   (a) Donner les valeurs de $p(A)$, $p(B/A)$ et $p(B/\bar{A})$.
   (b) Calculer $p(B\cap A)$ et $p(B\cap \bar{A})$. En déduire $p(B)$.
   (c) Calculer $p(A/B)$.
2. On prend 10 individus au hasard dans cette population et on désigne par X la v.a donnant le nombre de ceux ayant la maladie M_a et la maladie M_b.
   (a) Quelle est la loi de probabilité de X ? (Donner, en fonction de k, la probabilité $p(X = k)$ où $0 \leq k \leq 10$).
   (b) Déterminer la probabilité de l'événement " deux individus au plus sont atteints de le maladie M_a et de la maladie M_b".
   On donnera le résultat sous forme décimale approchée à 10^{-3} près.

Exercice 3 Une urne contient n jetons numérotés de 1 à n où n est un entier supérieur ou égal à 2. On tire successivement et avec remise 2 jetons de l'urne, On désigne par X et Y les variables aléatoires qui à chaque tirage font correspondre respectivement le plus petit et le plus grand des 2 nombres obtenus.

1. Soit $(a,b) \in \{1,2,...,n\}^2$, calculer la probabilité $p(a,b)$ de l'événement $(X = a, Y = b)$.
2. Déterminer les lois de probabilité des variables aléatoires réelles X et Y.
3. On définit les matrices unicolonnes U et V par :

$$U = \begin{pmatrix} p(X=1) \\ p(X=2) \\ \vdots \\ p(X=n) \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} p(Y=1) \\ p(Y=2) \\ \vdots \\ p(Y=n) \end{pmatrix}$$

   Démontrer qu'il existe une matrice M indépendante de n qu'on déterminera telle que $V = M.U$

● ● ● ● ● ● ● ● ● ● ●