Centre Ibn Abdoune
des Classes Préparatoire
aux Grandes Écoles
Khouribga

Année scolaire : 2011/2012
Filière **MP**

DEVOIR SURVEILLÉ COMMUN N°1

24/09/2011

durée : 3 heures

••••••••••

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie.

••••••••••

EXERCICE

Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ de dimension 3. $\mathscr{L}(E)$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E. Id_E désigne l'endomorphisme identique de E.
Si $f \in \mathscr{L}(E)$, on note $f^0 = Id_E$, $f^1 = f$ et $f^n = \underbrace{f \circ f \circ \ldots \circ f}_{n \text{ fois}}$, $(n \geq 2)$.
Si $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n$ est un élément de $\mathbb{R}[X]$, on définit l'endomorphisme $P(f)$ de E, en posant $P(f) = a_0 Id_E + a_1 f + \ldots + a_n f^n$.
Soit $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base de E. Soit l'endomorphisme de E défini par :

$$f(e_1) = e_2, \quad f(e_2) = e_3 \text{ et } f(e_3) = e_1.$$

1. Montrer que $f^3 = Id_E$.

2. On pose $F = \mathrm{Ker}\,(f - Id_E)$, $G = \mathrm{Ker}\,(f^2 + f + Id_E)$. Montrer que $E = F \oplus G$.

3. Soit λ un réel, démonter que si $\mathrm{Ker}\,(f - \lambda Id_E)$ est différent de $\{0\}$, alors $\lambda = 1$.

4. Soit Φ l'application de $\mathbb{R}[X]$ dans $\mathscr{L}(E)$, définie par :

$$\Phi(P) = P(f)$$

pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer que :

a) Φ est un homomorphisme d'espaces vectoriels et d'anneaux.

b) $\mathrm{Im}(\Phi)$ est un sous-espace vectoriel de dimension 3, engendré par $\{Id_E, f, f^2\}$.

c) $\text{Ker}\,(\Phi)$ est le sous-espace vectoriel engendré par le polynôme $X^3 - 1$.

5. On considère les deux polynômes $P(X) = X - 1$ et $Q(X) = X^2 + X + 1$.

a) Démontrer qu'il existe deux polynômes $S(X)$ et $T(X)$ vérifiant la relation :

$$(1) \quad P(X)S(X) + Q(X)T(X) = 1.$$

Donner deux polynômes vérifiant (1).

b) En déduire l'existence deux endomorphismes U et V de E vérifiant :

$$U + V = Id_E,\ \ U \circ V = V \circ U = 0,\ \ U \neq 0,\ \ V \neq 0,\ \ U^2 = U \ \text{ et } \ V^2 = V.$$

c) Montre que $E = \text{Im}(U) \oplus \text{Im}(V)$.

PROBLÈME

On considère un espace vectoriel E, de dimension finie $n \geqslant 2$, sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). $\mathscr{L}(E)$ désigne l'algèbre des endomorphismes de E ; si $u, v \in \mathscr{L}(E)$, l'endomorphisme composé $u \circ v$ sera noté simplement uv, $[u, v]$ désignera l'endomorphisme $uv - vu$ et l'identité se notera Id_E.

Si u est un endomorphisme de E, on note $\text{Tr}(u)$ la trace de u. $\mathcal{T}$ désigne l'ensemble des endomorphismes de E de trace nulle.

Pour $u \in \mathscr{L}(E)$ on pose $u^0 = \text{Id}_\text{E}$ et si $k \in \mathbb{N}, k \geqslant 2$, $u^k = uu^{k-1}$. On rappelle qu'un endomorphisme u est dit nilpotent s'il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$.

On définit l'application :

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathscr{L}(E) \times \mathscr{L}(E) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E) \\ & (u, v) & \longmapsto & [u, v] \end{array}$$

et pour $u \in \mathscr{L}(E)$ l'application :

$$\begin{array}{rccc} \Phi_u : & \mathscr{L}(E) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E) \\ & v & \longmapsto & [u, v] \end{array}$$

Pour $(m, p) \in \mathbb{N}^{*2}$, on note $\mathscr{M}_{m,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$, à m lignes et p colonnes. I_m est la matrice identité d'ordre m. Enfin, δ_{ij} est le symbole de Kroneker (on rappelle que $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ et $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$).

A- Quelques propriétés de Φ_u

1. Montrer que $\mathcal{T}$ est un hyperplan de $\mathscr{L}(E)$.

2. Montrer que Φ est une application bilinéaire antisymétrique.

3. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme qui n'est pas une homothétie. Montrer que $\mathrm{Vect}(\{Id_E, u, \ldots, u^{n-1}\})$ est inclus dans $\mathrm{Ker}\ \Phi_u$ et que $\dim(\mathrm{Ker}\ (\Phi_u)) \geqslant 2$.

4. Montrer que l'image de Φ est incluse dans $\mathcal{T}$ et que pour $u \in \mathscr{L}(E)$, $\mathrm{Im}(\Phi_{\mathrm{u}}) \subset \mathcal{T}$. Existe-t-il $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels que $[u, v] = Id_E$? Peut-on avoir $\mathrm{Im}(\Phi_{\mathrm{u}}) = \mathcal{T}$?

5. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$.

   a) Montrer que u est une homothétie si, et seulement si, pour tout $x \in E$, la famille $(x, u(x))$ est liée.

   b) En déduire que $\mathrm{Ker}\ \Phi_u = \mathscr{L}(E)$ si, et seulement si, u est une homothétie.

6. **a)** Soient $u, v \in \mathscr{L}(E)$; montrer par récurrence sur k que

$$(\Phi_u)^k(v) = \sum_{p=0}^{k} (-1)^p \mathrm{C}_k^p u^{k-p} v u^p.$$

   b) En déduire que si u est nilpotent, alors Φ_u l'est aussi.

B- Détermination de l'image de Φ

Soit u un endomorphisme non nul de E de trace nulle.

1. u peut-il être une homothétie ?

2. Montrer qu'il existe $e_1 \in E$ tel que la famille $(e_1, u(e_1))$ soit libre.

3. En déduire l'existence d'une base $(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ de E telle que la matrice A de u dans cette base soit de la forme :

$$\begin{pmatrix} 0 & {}^tX \\ Y & A_1 \end{pmatrix}$$

   où $(X, Y) \in \mathscr{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})$ et $A_1 \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$.

4. On suppose $A_1 = UV - VU$ avec $(U, V) \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})^2$

   a) Montrer qu'on peut trouver $\alpha \in \mathbb{K}$ tel que la matrice $U - \alpha I_{n-1}$ soit inversible.

   b) On pose $U' = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & U \end{pmatrix}$ et $V' = \begin{pmatrix} 0 & {}^tR \\ S & V \end{pmatrix}$ avec $(R, S) \in \mathscr{M}_{n-1,1}(\mathbb{K})^2$; établir l'équivalence :

$$A = U'V' - V'U' \iff [\,{}^tX = -{}^tR(U - \alpha I_{n-1}) \text{ et } Y = (U - \alpha I_{n-1})S].$$

5. Montrer alors par récurrence sur n que l'image de Φ est égale à $\mathcal{T}$.

C- Détermination de $\mathrm{Tr}(\Phi_u)$

Soit u un endomorphisme de E. Soient $\mathscr{B} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)$ une base de E et $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ la matrice de u dans cette base. Pour $(i,j) \in \{1,2,\ldots,n\}^2$, $u_{i,j}$ désigne l'endomorphisme de E tel que :

$$\forall k \in \{1,2,\ldots,n\},\ u_{i,j}(e_k) = \delta_{jk} e_i.$$

1. Rappeler pourquoi $(u_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est une base de $\mathscr{L}(E)$.
2. Calculer, pour tout $(i,j,k,l) \in \{1,2,\ldots,n\}^4$, le produit $u_{i,j}u_{k,l}$ et montrer que l'on a :
$$\forall (i,j) \in \{1,2,\ldots,n\}^2,\ \Phi_u(u_{i,j}) = \sum_{k=1}^{n} a_{k,i}u_{k,j} - \sum_{k=1}^{n} a_{j,k}u_{i,k}\ .$$
3. En déduire $\mathrm{Tr}(\Phi_u)$.

FIN DE L'ÉPREUVE