MP – CPGE Khouribga

19-09-2015

Devoir surveillé $n^\circ 1$

Durée : 4 heures

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie.

• • • • • • • • •

Exercice

Soit $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \ldots + a_1X + a_0$ un polynôme à coefficients complexes, avec $a_0 \neq 0$. On dit que $P(X)$ est réciproque si pour tout zéro x de $P(X)$, $\dfrac{1}{x}$ est aussi un zéro de même ordre de multiplicité que x.

1. Montrer que, pour que $P(X)$ soit réciproque, il faut et il suffit que

$$a_i = a_{n-i} \text{ pour tout } i,\ 0 \leqslant i \leqslant n$$

ou bien

$$a_i = -a_{n-i} \text{ pour tout } i,\ 0 \leqslant i \leqslant n.$$

2. Supposons $P(X)$ réciproque. Montrer qu'il existe un polynôme réciproque de degré pair $Q(X) = \displaystyle\sum_{j=0}^{2m} b_jX^j$ avec $b_j = b_{2m-j}$, tel que

$$P(X) = (X-1)^s(X+1)^rQ(X)$$

($Q(X)$ n'admettant ni 1 ni -1 comme zéros).

3. Prouver que, pour $x \neq 0$, on a :

$$Q(X) = \left[b_0\left(x^m + \frac{1}{x^m}\right) + b_1\left(x^{m-1} + \frac{1}{x^{m-1}}\right) + \ldots + b_{m-1}\left(x + \frac{1}{x}\right) + b_m\right]x^m.$$

4. On pose $y = x + \dfrac{1}{x}$. Démontrer que $x^k + \dfrac{1}{x^k}$ est une fonction polynôme $P_k(y)$, en y, de degré k (pour tout entier $k \geqslant 0$) et donc $Q(x)$ est une fonction en y de degré m.

5. Trouver les zéros des polynômes :

i- $X^4 - 2X^3 + \dfrac{3}{4}X^2 - 2X + 1$

ii- $X^7 - 5X^6 + 8X^5 - 4X^4 - 4X^3 + 8X^2 - 5X + 1$.

Problème

NOTATIONS

(a) Dans tout le problème, on donne une application continue g du segment $[0,1]$ de $\mathbb{R}$ dans lui-même qui vérifie : $g(0)=0$, $g(1)=1$ et $\forall x \in]0,1[, g(x) \neq x$.

(b) On désigne par E l'espace vectoriel réel des applications continues de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, on note E^+ l'ensemble des éléments f de E qui vérifient : $\forall x \in [0,1], \quad f(x) \geqslant 0$.

(c) On rappelle que la notation $\inf(x,y)$, pour x, y réels, désigne le plus petit des deux nombres x et y, et que l'on a : $\inf(x,y) = \dfrac{1}{2}[x+y-|x-y|]$.

PARTIE I

Propriétés algébriques des endomorphismes u_g et v_g

1. Soit f un élément de E. On note $u(f)$ et $v(f)$ les applications de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$, dont la valeur en un point a quelconque de $[0,l]$ est donnée par :

$$u_g(f)(a) = \int_0^1 \inf(x, g(a)) f(x)dx, \quad v_g(f)(a) = \int_0^1 \inf(a, g(x)) f(x)dx$$

Démontrer, sans aucune référence à des théorèmes généraux concernant la continuité des fonctions du type $a \longmapsto \displaystyle\int_\alpha^\beta \phi(a,t)dt$, que les applications $u_g(f)$ et $v_g(f)$ sont continues.

2. Démontrer que les applications $u_g : f \longmapsto u_g(f)$, et $v : f \longmapsto v_g(f)$ sont des endomorphismes vectoriels de E ; démontrer que u_g est injectif ; par un exemple simple, montrer qu'il n'en est pas de même en général pour v_g.

3. On suppose, dans cette question exclusivement, que l'application g est strictement croissante, montrer que l'endomorphisme v_g est injectif.

4. En supposant g dérivable, montrer que l'endomorphisme u_g n'est pas surjectif.

PARTIE II

Propriétés analytiques des endomorphismes u_g et v_g

On suppose dans tout ce qui suit que l'application g est strictement croissante, dérivable en 0, et qu'il existe x_0 dans $]0,1[$ tel que : $g(x_0) < x_0$.

1. Montrer l'inégalité : $0 \leqslant g'(0) \leqslant 1$. On suppose désormais $g'(0) > 0$.

2. Si f appartient à E^+, si h appartient à E, montrer :

$$\sup_{a\in[0,1]} u_g(f)(a) = \int_0^1 x f(x)dx, \quad \sup_{a\in[0,1]} |u_g(h)(a)| \leqslant \int_0^1 x|h(x)|dx$$

$$\sup_{a\in[0,1]} |v_g(f)(a)| \leqslant \int_0^1 g(x)|h(x)|dx.$$

3. Si f appartient à $[0,1]$, montrer :

$$u_g(f)(a) \leqslant \int_0^1 \inf(x,a)f(x)dx,\;\; v_g(f)(a) \leqslant \int_0^1 \inf(x,a)f(x)dx.$$

PARTIE III

Propriétés topologiques des endomorphismes u_g et v_g

Si f appartient à E, on pose :

$$n_g(f) = \sup_{a\in[0,1]} u_g(|f|(a),\;\; N_g(f) = \sup_{a\in[0,1]} v_g(|f|)(a).$$

($|f|$ désigne comme d'habitude l'application : $x \longmapsto |f(x)|$ de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$).

1. Démontrer que les applications n_g et N_g ainsi définies de E dans l'ensemble des réels positifs ou nul , sont des normes.

2. Montrer qu'il existe un élément α de $]0,1]$ tel que :

$$\forall x \in]0,1],\;\; \alpha x \leqslant g(x)$$

3. En déduire, pour f dans E, et a dans $[0,l]$, les inégalités :

$$u_g(f)(a) \leqslant \int_0^1 \inf(x,a\alpha)f(x)dx,\;\; v_g(f)(a) \leqslant \int_0^1 \inf(\alpha x,a)f(x)dx.$$

4. Montrer, pour f dans E : Les normes n_g et N_g sont-elles équivalentes ?

PARTIE IV

Propriétés topologiques de E

Pour n entier $\leqslant 3$, on définit l'application f_n de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ de la façon suivante :

$$f_n(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n}\right[\\ \dfrac{nx}{2} - \dfrac{2-n}{4}, & \text{si } x \in \left[\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}\right[\\ 1, & \text{si } x \in \left[\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{n}, 1\right] \end{cases}$$

1. Démontrer que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de Cauchy dans E pour les normes n et N

2. Soit f_0 l'application de $[0,1]$ dans $\mathbb{R}$ définie de la façon suivante :

$$f_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \in \left[0, \dfrac{1}{2}\right[\\ \dfrac{1}{2}, & \text{si } x = \dfrac{1}{2} \\ 1, & \text{si } x \in \left]\dfrac{1}{2}, 1\right] \end{cases}$$

On pose : $E' = E \cup \{f_0\}$, et l'on définit une application d de $(E')^2$ dans l'ensemble des réels positifs ou nul par les égalités :

$d(f,g) = \int_0^1 x|f(x) - g(x)|dx$ si f et g appartiennent a E,

$d(f, f_0) = d(f_0, f) = \int_0^1 x|f_0(x) - f(x)|dx$ si f appartient à E,

$d(f_0, f_0) = 0$.

Montrer que le couple (E', d) est un espace métrique, et que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ tend vers f_0 dans (E', d) lorsque n tend vers $+\infty$.
En déduire que la suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ ne converge dans aucun des espaces normés (E, n_g), (E, N_g).

3. On considère l'application p_0 de E dans l'ensemble des réels positifs ou nul ainsi définie :

$$p_0(f) = \int_0^1 |f(x)|dx.$$

Montrer que les normes p_0 et n_g sur E ne sont pas équivalentes.
(À cet effet, on pourra considérer les éléments $\phi_{\delta,\varepsilon}$ définis, pour ε dans $]0,1[$, δ dans $\mathbb{R}$, ainsi $\phi_{\delta,\varepsilon}(x) = x^\delta$ si x appartient à $[\varepsilon, 1]$, $\phi_{\delta,\varepsilon}(x) = x^\delta$ si x appartient $[0, \varepsilon[$, et estimer les réels $p_0(\phi_{\delta,\varepsilon})$ et $n_g(\phi_{\delta,\varepsilon})$).

Fin de l'épreuve