DEVOIR SURVEILLÉ n°2

Durée : 4 heures

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie.

•••••

Exercice 1

Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ qui, à t associe $P(tX)$, où P est un polynôme fixé de $\mathbb{R}_n[X]$. En utilisant les applications coordonnées de f suivant la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$, montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer sa fonction dérivée.

Exercice 2

Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ une application dérivable. Notons $A = \{(x, y) \in I \times I / x < y\}$ (f n'est pas nécessairement de classe $\mathcal{C}^1$).

- Démontrer que A est une partie connexe par arcs de $\mathbb{R}^2$.
- Pour $(x, y) \in A$, posons $g(x, y) = \frac{f(y) - f(x)}{y - x}$. Démontrer que $g(A) \subset f'(I) \subset \overline{g(A)}$.
- Démontrer que $f'(I)$ est un intervalle.

Problème

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant 0. $\mathcal{C}^0(I)$ désigne l'espace vectoriel réel des fonctions continues de I dans $\mathbb{R}$ et on note :

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in I} |f(x)|.$$

On désigne par $\mathcal{C}^1(I)$ l'espace vectoriel réel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ de I dans $\mathbb{R}$ et on note :

$$L^1(I) = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(I) ; \int_I |f| \text{ existe} \right\} \text{ et } \forall f \in L^1(I), \|f\| = \int_I |f|,$$

$$L^2(I) = \left\{ f \in \mathcal{C}^0(I) ; \int_I |f|^2 \text{ existe} \right\} \text{ et } \forall f \in L^2(I), \|f\|_2 = \sqrt{\int_I |f|^2}.$$

Partie I

1. Soit f dans $\mathcal{C}^0(I)$ et c un réel strictement positif. Démontrer que l'équation :

$$y' + cy = f$$

admet une unique solution, notée $\varphi(f)$, dérivable sur I , et qui vérifie :

$$\varphi(f)(0) = 0.$$

Démontrer :

$$\forall x \in I, \varphi(f)(x) = e^{-cx} \int_0^x e^{ct} f(t) dt.$$

2. Exprimer $\varphi(f)'$ en fonction de f et $\varphi(f)$ et démontrer que $\varphi(f)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur I .
Prouver que l'application $\varphi : f \mapsto \varphi(f)$ est linéaire sur $\mathcal{C}^0(I)$.

Partie II

On suppose, dans cette partie, que l'intervalle I est un segment $[a, b]$ avec $a \leq 0 < b$.

1. Démontrer qu'il existe des réels positifs M_1 et M_2 tels que :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I), \|f\|_1 \leq M_1 \|f\|_2 \leq M_2 \|f\|_\infty.$$

2. Démontrer qu'il existe un réel positif M_0 tel que :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I), \|\varphi(f)\|_\infty \leq M_0 \|f\|_\infty.$$

3. Démontrer qu'il existe un réel A positif tel que :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I), \forall x \in I, |\varphi(f)(x)| \leq A \|f\|_1.$$

4. Démontrer qu'il existe un réel B positif tel que :

$$\forall f \in \mathcal{C}^0(I), \forall x \in I, |\varphi(f)(x)| \leq B \|f\|_2.$$

En déduire :

$$\exists K \in \mathbb{R}^+, \forall f \in \mathcal{C}^0(I), \|\varphi(f)\|_2 \leq K \|f\|_2.$$

5. L'application φ de $\mathcal{C}^0([a, b])$ dans lui-même est-elle continue

- lorsque $\mathcal{C}^0([a, b])$ est muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$?
- lorsque $\mathcal{C}^0([a, b])$ est muni de la norme $\|\cdot\|_1$?
- lorsque $\mathcal{C}^0([a, b])$ est muni de la norme $\|\cdot\|_2$?

Partie III

Dans cette partie, I désigne l'intervalle $[0, +\infty[$ et, pour tout réel $\lambda > 0$, f_λ est la fonction définie sur I par :

$$\forall x \in I, f_\lambda(x) = e^{-\lambda x}.$$

1. Déterminer $\varphi(f_\lambda)$.

2. Démontrer que f_λ et $\varphi(f_\lambda)$ sont intégrables sur I . Calculer $\|f_\lambda\|_1$ et $\|\varphi(f_\lambda)\|_1$.
3. Démontrer que f_λ^2 et $\varphi(f_\lambda)^2$ sont intégrables sur I . Calculer $\|f_\lambda\|_2$ et $\|\varphi(f_\lambda)\|_2$.
4. Démontrer que φ est un endomorphisme continu de $L^1(I)$ et calculer :

$$\|\varphi\|_1 = \sup_{\substack{f \in L^1(I) \\ \|f\|_1 \leq 1}} \|\varphi(f)\|_1.$$

5. On pose $g = \varphi(f)$. On a donc $f = g' + cg$.

Démontrer :

$$\forall X > 0, \frac{g^2(X)}{2} + c \int_0^X g^2(t) dt = \int_0^X f(t)g(t) dt.$$

En déduire que φ est un endomorphisme continu de $L^2(I)$ et calculer :

$$\|\varphi\|_2 = \sup_{\substack{f \in L^2(I) \\ \|f\|_2 \leq 1}} \|\varphi(f)\|_2.$$

Partie IV

I désigne maintenant un intervalle quelconque de $\mathbb{R}$ contenant 0 et $H(I)$ est l'espace vectoriel réel des fonctions f de classe $\mathcal{C}^1$ telles que f et f' soient de carrés intégrables sur I :

$$H(I) = \left\{ f \in \mathcal{C}^1(I), \int_I |f|^2 \text{ et } \int_I |f'|^2 \text{ existent} \right\}.$$

1. a) Démontrer que, si f et g sont dans $H(I)$, alors les fonctions fg et $f'g'$ sont intégrables sur I .
- b) Démontrer que l'application :

$$\begin{aligned} H(I)^2 &\rightarrow \mathbb{R} \\ \phi : (f, g) &\mapsto \phi(f, g) = \int_I f(t)g(t) dt + \int_I f'(t)g'(t) dt \end{aligned}$$

définit un produit scalaire sur $H(I)$.

- c) En déduire que l'application $\|\cdot\|_H$ définie par :

$$\forall f \in H(I), \|f\|_H = \sqrt{\int_I f(t)^2 dt + \int_I f'(t)^2 dt}$$

est une norme sur $H(I)$.

2. On suppose, dans cette question, que φ est un endomorphisme continu de $L^2(I)$.
On pose :

$$K = \{f \in H(I), f(0) = 0\}.$$

- a) Démontrer que, pour tout f dans $L^2(I)$, $\varphi(f)'$ est dans $L^2(I)$, $\varphi(f)$ est dans K .
Démontrer que :

$$\exists A > 0, \forall f \in L^2(I), \|\varphi(f)\|_H \leq A\|f\|_2.$$

- b) Démontrer que φ est un isomorphisme de $L^2(I)$ dans K .
- c) Démontrer que φ est continue de $(L^2(I), \|\cdot\|_2)$ dans $(K, \|\cdot\|_H)$.
- d) Démontrer que φ^{-1} est continue de $(K, \|\cdot\|_H)$ dans $(L^2(I), \|\cdot\|_2)$.

FIN DE L'ÉPREUVE