MP – CPGE Khouribga

28-11-2015

Devoir surveillé $n°3$

Durée : 4 heures

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie.

Exercice

On considère les ensembles suivants :

$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leqslant 1\}$, $\triangle = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\}$ et $C = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 = 1\}$

1. Montrer que :

  1*a*. D et C sont des ensembles fermés de $\mathbb{R}^2$,

  1*b*. $\triangle$ est un ensemble ouvert,

  1*c*. C est connexe par arcs.

2. D, $\triangle$, C sont-ils compacts ?

3. On donne l'application f de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$f(x,y) = \begin{cases} \sqrt{x^2+y^2}, & \text{si } (x,y) \in D \\ \dfrac{1}{2}(x^2+y^2+1), & \text{si } (x,y) \in \mathbb{R}^2 \backslash D \end{cases}$$

  3*a*. Tracer le graphe de la fonction $x \mapsto f(x,0)$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

  3*b*. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.

4. **4*a*.** Montrer que f admet des dérivées partielles premières $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)$ en tout point (x_0,y_0) de $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

  4*b*. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existent-ils ? f est-elle différentielle en $(0,0)$?

  4*c*. Montrer que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en tout point de C.

  4*d*. En justifiant que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues en tout point de $\triangle \backslash \{(0,0)\}$ et en tout point de $\mathbb{R}^2 \backslash D$ en déduire que $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sont continues sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

  4*e*. f est-elle différentielles sur $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$.

Problème

$\mathbb{R}$ est le corps des nombres réels. $\mathbb{C}$ est celui des nombres complexes et n est un entier naturel supérieur où égal à 2.
On note E le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{C}$. I est la matrice identité de E. Pour A élément de E, a_{ij} est le coefficient de A situé dans la i-ème ligne et la j-ème colonne. On note F le $\mathbb{C}$-espace vectoriel des matrices à n lignes et une colonne et à coefficients dans $\mathbb{C}$.
Pour $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ élément de F, on pose $\|X\| = \sup\limits_{1\leqslant k\leqslant n} |x_k|$, on rappelle que l'on définit ainsi une norme sur F. On note $\operatorname{Ker} A$ l'ensemble des éléments X de F vérifiant $AX = 0$.
Une matrice $A = (a_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ à coefficients réels est dite stochastique si :

$$\begin{cases} \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}, & \displaystyle\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1 \\ \forall (i, j) \in \{1, 2, \dots, n\}^2, & a_{ij} \geqslant 0 \end{cases}$$

On note S l'ensemble des matrices stochastiques de E.
Dans tout le problème A est un élément de S, $A \neq I$

Première partie

1. Soit B un élément de S. Prouver que AB appartient à S.

2. Montrer que pour tout k entier naturel, A^k appartient à S.

3. Soit X un élément de F. Démontrer que $\|AX\| \leqslant \|X\|$. En déduire pour tout k entier naturel, $\|A^k X\| \leqslant \|X\|$.

4. Montrer que 1 est valeur propre de A.

5. Soit λ une valeur propre complexe de A, montrer que $|\lambda| \leqslant 1$.

6. Soit λ une valeur propre complexe de A, telle que $|\lambda| = 1$.

6*a*. Soit X un élément de $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)^2$. On pose : $Y = (A - \lambda I)X$.

i) Établir que, pour tout k entier naturel, $k \geqslant 2$, $A^k X = \lambda^k X + k\lambda^{k-1} Y$.

ii) En déduire que $Y = 0$ (on pourra utiliser l'inégalité établie à la question **3.** de la première partie).

iii) Prouver que $\operatorname{Ker}(A - \lambda I)^2 = \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$.

6*b*. En déduire que, pour tout k entier naturel, $k \geqslant 2$, on a :

$$\operatorname{Ker}(A - \lambda I)^k = \operatorname{Ker}(A - \lambda I).$$

Deuxième partie

On suppose que A admet $r+1$ valeurs propres complexes deux à deux distinctes, on les note $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_r$ avec $\lambda_0 = 1$.
Dans toute cette partie p désigne un entier naturel non nul.

Pour X élément de F, on pose : $X_p = \dfrac{1}{p}\displaystyle\sum_{k=0}^{p} A^k X$. On veut étudier la convergence, quand p tend vers $+\infty$, de la suite $(X_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ dans F.

1. Soit λ une valeur propre complexe de A, $\lambda \neq 1$.

1*a*. Prouver que : $\displaystyle\lim_{p\to\infty}\left(\frac{1}{p}\sum_{k=0}^{p}\lambda^k\right) = 0$.

1*b*. On suppose que X est un élément de $\mathrm{Ker}(A-\lambda I)$. Montrer que la suite $(X_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

2. On suppose, dans cette question, que A est diagonalisable.
Soit X un élément quelconque de F. Démontrer que la suite $(X_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge vers un élément de $\mathrm{Ker}(A-I)$.

3. On s'intéresse dans cette question à une valeur propre complexe λ de A vérifiant : $|\lambda| < 1$.
Soit X un élément de $\mathrm{Ker}(A-\lambda I)^q$, où q est un entier naturel, $q \geqslant 2$.

3*a*. Soit k un entier naturel, $k \geqslant q$. Montrer que :

$$A^k = \sum_{j=0}^{k} \mathrm{C}_k^j \lambda^{k-j}(A-\lambda I)^j$$

et que

$$A^k X = \sum_{j=0}^{q-1} \mathrm{C}_k^j \lambda^{k-j}(A-\lambda I)^j X.$$

On rappelle que $\mathrm{C}_k^j = \dfrac{k!}{j!(k-j)!}$.

3*b*. Prouver que, pour tout j élément de $\{0, 1, \ldots., q-1\}$, on a : $\displaystyle\lim_{k\to\infty} \mathrm{C}_k^j \lambda^{k-j} = 0$.

3*c*. Démontrer que la suite $(X_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

4. On suppose que le polynôme caractéristique de A, noté $P_A(T)$, est égal à :

$$P_A(T) = \prod_{j=0}^{s}(T-\lambda_j)^{k_j}\prod_{j=s+1}^{r}(T-\lambda_j)^{q_j}$$

où $s, k_o, \ldots, k_s, q_{s+1}, \ldots, q_r$, sont des entiers naturels non nuls avec $s < r$ et où $|\lambda_j| = 1$ si et seulement si $j \leqslant s$.

4*a*. Prouver que F est égal é la somme directe de sous espaces vectoriels suivante :

$$F = \mathrm{Ker}(A-\lambda_o I_) \oplus \ldots \oplus \mathrm{Ker}(A-\lambda_s I) \oplus \mathrm{Ker}(A-\lambda_{s+1} I)^{q_{s+1}} \oplus \ldots \oplus \mathrm{Ker}(A-\lambda_r I)^{q_r}.$$

4*b*. Soit X un élément quelconque de F. Étudier la convergence de la suite $(X_p)_{p\in\mathbb{N}^*}$.

Fin de l'épreuve