MP – CPGE Khouribga

16-01-2016

Devoir surveillé $n°4$

Durée : 4 heures

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie.

••••••••

Exercice

Soit E l'espace vectoriel des matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ symétriques. Pour A et B dans E on dit que $A \leqslant B$ si et seulement si $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), {}^tXAX \leqslant {}^tXBX$.

1. Montrer que $\leqslant$ est une relation d'ordre sur E.

2. Soit $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite croissante majorée d'éléments de E. Montrer que cette suite converge dans E.

3. ***3a.*** On définit une suite de fonctions $p_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ par $p_0 = 0$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in [0,1]$,

$$p_{n+1}(x) = p_n(x) + \frac{1}{2}\left(x - (p_n(x))^2\right).$$

i. Montrer que la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge simplement sur $[0,1]$ vers la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$.

ii. Démontrer que, pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$0 \leqslant \sqrt{x} - p_n(x) \leqslant \sqrt{x}\left(1 - \frac{1}{2}\sqrt{x}\right)^n.$$

En déduire que la convergence est uniforme sur $[0,1]$.

3b. Soit $A \in E$. Notons, pour $k \in \mathbb{N}$, $B_k = p_k(A)$. Montrer que si les valeurs propres de A sont dans $[0,1]$ alors la suite $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge vers un élément de E à préciser.

Problème

Dans tout le problème les matrices seront des matrices carrées 3×3, ou des matrices colonnes 3×1, à coefficients dans $\mathbb{C}$.

On pourra identifier matrice carrée avec application linéaire dans une base canonique, et matrice colonne avec vecteur.

Rappels et définitions

- Soit A une matrice de dimension quelconque, de terme général $a_{i,j}$. On pose $\|A\| = \sup\limits_{i,j} |a_{i,j}|$.

  On admet que l'application $A \mapsto \|A\|$ est une norme sur l'espace des matrices ayant même dimension que A.

- À toute suite $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ de matrices, on associe la suite dite « des sommes partielles » $U_k = \sum_{i=0}^{k} A_i$.

  Si cette nouvelle suite converge, on note $\lim_{k\to+\infty} U_k = \sum_{i=0}^{\infty} A_i$ que l'on appelle *somme de la série de terme général* A_k.
- Pour toute matrice A, on note $\exp(A)$ la somme de la série *convergente* de terme général $\dfrac{A^k}{k!}$. Soit

$$\exp(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}.$$

Le but de ce problème est, pour quelques matrices A, de calculer, lorsque c'est possible, $\sum_{i=0}^{\infty} A^i$ et $\exp(A) = \sum_{i=0}^{\infty} \dfrac{A^i}{i!}$.

Partie I

Dans cette partie les matrices sont, sauf indication du contraire, dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

1. **1*a*.** Montrer que $\|AB\| \leqslant 3\|A\|\|B\|$. En déduire que$\|A^k\| \leqslant 3^{k-1}\|A\|^k$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.

   1*b*. Montrer que, si A est inversible, on a pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\|A^k\|^{\frac{1}{k}} \geqslant \dfrac{1}{3\|A^{-1}\|}$. En déduire que si $\lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}} = 0$ alors A n'est pas inversible.

2. **2*a*.** Simplifier l'expression $(I - A)\left(\sum_{i=0}^{k} A^i\right)$ où I désigne la matrice unité de $\mathscr{M}_3(\mathbb{C})$.

   2*b*. Montrer que si $\lim_{k\to+\infty} A^k = 0$, alors pour toute matrice colonne 3×1 notée X, on a $\lim_{k\to+\infty} A^k X = 0$.
   En déduire que $A - I$ est inversible et exprimer son inverse comme somme d'une série.

   En déduire l'existence de $\sum_{i=0}^{\infty} A^i$.

3. Soit A telle que $\lim_{k\to\infty} A^k = B$.

   3*a*. Si B est inversible, montrer que A est égale à I.

   3*b*. Montrer que les valeurs propres de A valent 1 ou ont un module strictement inférieur à 1.

   3*c*. On suppose que A est diagonalisable et que $A \neq I$.
   Montrer que si $1 \notin \mathrm{Sp}(A)$ alors B est nulle, et que si $1 \in \mathrm{Sp}(A)$ alors B est diagonalisable avec $\mathrm{Sp}(B) \subset \{0, 1\}$.

4. Soit A quelconque. Montrer que si $A = PBP^{-1}$ alors $\exp(A) = P\exp(B)P^{-1}$.

Partie II

Dans cette partie nous nous intéressons plus particulièrement aux matrices triangulaires supérieures ou diagonales.

On pose $D = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$, $M = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 1 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ avec a, b et c des complexes qui ne sont pas forcément différents.

1. Déterminer la forme générale de D^k, M^k et Q^k avec $k \in \mathbb{N}^*$.

2. **2*a*.** Déterminer les a, les b et les c pour que D^k, M^k et Q^k convergent. Calculer dans ce cas $\lim\limits_{k\to\infty} D^k$, $\lim\limits_{k\to\infty} M^k$ et $\lim\limits_{k\to\infty} Q^k$.

2*b*. Si on suppose que $\lim\limits_{k\to\infty} D^k = 0$, calculer $\sum\limits_{i=0}^{\infty} D^i$.

2*c*. Si on suppose que $\lim\limits_{k\to\infty} M^k = 0$, calculer $\sum\limits_{i=0}^{\infty} M^i$.

2*d*. Si on suppose que $\lim\limits_{k\to\infty} Q^k = 0$, calculer $\sum\limits_{i=0}^{\infty} Q^i$.

3. Déterminer la valeur de $\exp(D)$, $\exp(M)$ et $\exp(Q)$.

Partie III

Dans cette partie nous nous intéressons plus particulièrement aux matrices nilpotentes. Dans toute cette partie, sauf indication du contraire, on considère N une matrice carrée 3×3 nilpotente non nulle à coefficients dans $\mathbb{C}$.

1. **1*a*.** Montrer que les quatre affirmations suivantes sont équivalentes :

i) N est nilpotente,

ii) $\mathrm{Sp}(N) = \{0\}$,

iii) N est semblable à une matrice triangulaire supérieure de diagonale nulle,

iv) $N^3 = 0$.

Application : En déduire que l'équation $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, d'inconnue A une matrice carrée 3×3 n'admet pas de solution.

1*b*. Montrer que $\det(I - N) = 1$.
En déduire que $I - N$ est inversible. Que vaut l'inverse de $I - N$?
Quelles sont les valeurs propres de $I - N$? En déduire que $I - N$ n'est pas diagonalisable.

1*c*. Montrer que si $N^2 \neq 0$ et N nilpotente alors il existe $X \in \mathbb{C}^3$ telle que $\left(X, NX, N^2X\right)$ est une base de $\mathbb{C}^3$. En déduire que :

$$A \text{ commute avec } N \Leftrightarrow A \text{ combinaison linéaire de } I, N, \text{ et } N^2.$$

En déduire que si A commute avec N alors $\det(A-N)=\det(A)$.
A-t-on encore $\det(A-N)=\det(A)$ si A ne commute pas avec N ?

2. Soient N_1 et N_2 deux matrices nilpotentes telles que $N_1N_2=N_2N_1$.

2*a*. Montrer que N_1N_2 et que N_1+N_2 sont nilpotentes.

2*b*. En développant $(N_1+N_2)^3$ et $(N_1+N_2)^4$, montrer que $N_1N_2^2+N_1^2N_2=0$ et que $N_1^2N_2^2=0$.

2*c*. Montrer que $\exp(N_1+N_2)=\exp(N_1)\exp(N_2)$.

2*d*. En déduire que si N est nilpotente alors $\exp(N)$ est inversible ; vous donnerez l'inverse de $\exp(N)$.

3. *Application* : Dans cette question (et dans cette question seulement) on considère

$$N=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1\\ -1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3*a*. Montrer que N est nilpotente.

3*b*. Calculer $\sum_{i=0}^{\infty} N^i$. En déduire l'inverse de $I-N$.

3*c*. Calculer $\exp(N)$ et $\exp(-N)$.

Partie IV

Dans cette partie nous calculerons l'exponentielle d'une matrice dans deux cas particuliers.

1. On considère $R=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 2\\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ et $D=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

1*a*. Déterminer les valeurs propres de R.

1*b*. Déterminer les espaces propres de R. R est-elle diagonalisable ?
En déduire la valeur de $\exp(R)$.

2. On considère $M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $T=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 1\\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2*a*. Déterminer les valeurs propres de M.

2*b*. Déterminer les espaces propres de M. M est-elle diagonalisable ?
Déterminer U et V, deux matrices colonnes 3×1 propres de M, avec U associée à la valeur propre 1 et V associée à la valeur propre -1.

2*c*. Déterminer W matrice colonne 3×1 telle que $(M+I)W=V$.
En déduire que M et T sont deux matrices semblables.
Déterminer une matrice 3×3 notée P inversible telle que $M=PTP^{-1}$.
Calculer $\exp(M)$.

Fin de l'énoncé