Centre Ibn Abdoune
des Classes Préparatoires
aux Grandes Écoles
Khouribga

Année scolaire : 2015/2016
Filière **MP**

*Devoir surveillé
commun n°5*

06/02/2016

durée : 4 heures

•••••

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie.

•••••

EXERCICE 1

On considère une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs complexes et la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

1. Montrer l'équivalence entre les deux propriétés suivantes :

- (i). Il existe des réels a et M strictement positifs tels que $\forall n \in \mathbb{N}, |a_n| \leq M e^{-an}$.
- (ii). $R > 1$.

2. Si la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie l'une des propriétés (i) ou (ii), montrer alors que la

fonction $f : t \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{int}$ est développable en série entière.

EXERCICE 2

Pour tout entier naturel n , on pose $a_n = \int_0^1 \left(\frac{1+t^2}{2}\right)^n dt$.

1. Montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ et que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} (-1)^n a_n$ converge, calculer sa somme.

2. Montrer que la série $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n$ diverge. (utiliser l'inégalité $2t \leq 1 + t^2$).

On considère la série entière $\sum_{n \in \mathbb{N}} a_n x^n$ et on note R son rayon de convergence. Soit

$$S : \mapsto S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

3. Montrer que $R = 1$.

4. Montrer que $S(x) = 2 \int_0^1 \frac{dt}{2 - x - xt^2}$ pour tout $x \in]-1, 1[$.

PROBLÈME

Soit E l'ensemble des fonctions réelles de la variable réelle t ayant les propriétés suivantes :

- (i). toute fonctions $f \in E$ est définie et continue sur $[0, +\infty[$.
- (ii). $\forall x > 0, \lim_{t \rightarrow +\infty} e^{-xt} f(t) = 0$.

A toute fonction $f \in E$, on fait correspondre une fonction F de la variable réelle x définie par :

$$\forall x > 0, F(x) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} f(t) dt.$$

La fonction F est appelée *transformée de Laplace* de f et notée $L(f)$.

Partie 1 : Généralités

1. **a)** Quelle est la dimension de l'ensemble E en tant qu'espace vectoriel sur $\mathbb{R}$?
 - b)** Montrer que l'intégrale définissant $L(f)(x)$ est absolument convergente pour tout $x > 0$.
 - c)** Montrer que L est une application linéaire de E dans l'espace vectoriel des fonctions numériques sur $]0, +\infty[$.
2. Déterminer la transformée de chacune des fonctions ci-dessous :

$$f_1(t) = a, \quad f_2(t) = e^{-at} \quad (a > 0), \quad f_3(t) = t^n \quad (n \in \mathbb{N}^*).$$

$$f_4(t) = \sin(wt), \quad f_5(t) = \cos(wt) \quad (w \in \mathbb{R}).$$

3. On suppose f continument dérivable et telle que $f' \in E$.
- a)** Montrer que $L(f') = xL(f)(x) - f(0)$.
 - b)** En supposant que f admet une dérivée seconde $f'' \in E$, déterminer $L(f'')$.

Partie 2 : Continuité et injectivité

1. CONTINUITÉ DE $L(f)$: On se propose d'étudier la continuité de $L(f)$.

a) Si $f \in E$, montrer que g_1 définie par $g_1(t) = tf(t)$ appartient à E .

b) Montrer que :

$$\forall h \in \mathbb{R}, \forall t \geq 0, \exists \theta \in]0, 1[, e^{-ht} - 1 = -hte^{-\theta ht}.$$

c) En déduire pour $h > 0$ l'inégalité :

$$|L(f)(x+h) - L(f)(x)| \leq h \int_0^{+\infty} e^{-t} |g_1(t)| dt.$$

d) En déduire que $L(f)$ est continue sur $]0, +\infty[$.

2. INJECTIVITÉ DE LA TRANSFORMÉE DE LAPLACE : Soit $f \in E$ une application telle que pour tout $x > 0$, $L(f)(x) = 0$.

a) Soient $x > 0$, $a > 0$ et $g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall t \in [0, +\infty[, g(t) = \int_0^t e^{-xu} f(u) du.$$

i. Montrer que $L(f)(x+a) = a \int_0^{+\infty} e^{-at} g(t) dt$.

ii. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\int_0^1 g\left(-\frac{\ln u}{a}\right) u^n du = 0$.

iii. Démontrer que pour tout $t \in [0, +\infty[, g(t) = 0$. (Utiliser le théorème de Weierstrass : pour toute fonction continue $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, il existe une suite de fonctions polynomiales convergent uniformément vers f sur $[a, b]$.)

b) En déduire $f = 0$.

Partie 3 : Applications

1. APPLICATION 1 : On considère l'équation différentielle $y'' + y = 1$.

a) Utiliser la transformation L pour calculer la solution f satisfaisant aux conditions $f(0) = 2$ et $f'(0) = 0$.

b) Retrouver le résultat en intégrant par le procédé classique.

2. APPLICATION 2 : On considère la fonction $t \mapsto e^t$.

a) Montrer qu'elle n'appartient pas à E .

b) Pour quelles valeurs de x l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-tx} e^t dt$ est-elle convergente ?

c) Quelles sont, pour ces valeurs, les transformées par L de $t \mapsto e^t$ et $t \mapsto te^t$?

d) Montrer que l'on peut utiliser L pour résoudre l'équation différentielle :

$$y''(t) + 5y'(t) + 4y(t) = e^t(10t + 7)$$

avec $y(0) = y'(0) = 0$.

3. APPLICATION 3 : Résoudre le système différentiel avec conditions initiales :

$$\begin{cases} x' + 2y'' = e^{-t}, \\ x' + 2x - y = 1, \\ x(0) = y(0) = y'(0) = 0. \end{cases}$$

FIN DE L'ÉPREUVE