Centre Ibn Abdoune
des Classes Préparatoires
aux Grandes Écoles
Khouribga

Année scolaire : 2015/2016
Filière **MP**

Devoir surveillé commun n°6

12/03/2016

durée : 4 heures

••••••••

Les candidats sont informés que la précision des raisonnements ainsi que le soin apporté à la rédaction seront des éléments pris en compte dans la notation. Les candidats pourront admettre et utiliser le résultat d'une question non résolue s'ils l'indiquent clairement sur la copie.

••••••••

Exercice

On note $\mathscr{D}$ le demi plan ouvert $\mathscr{D} = \{z \in \mathbb{C}/\mathrm{Re(z)} > 0\}$. On définit la "fonction Gamma d'Euler" sur $\mathscr{D}$ par :

$$\forall z \in \mathscr{D}, \;\; \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt.$$

1. Montrer que Γ est une fonction holomorphe sur $\mathscr{D}$.
2. Montrer que pour tout $z \in \mathscr{D}$, $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\Gamma(n) = (n-1)!$.
3. Montrer que pour tout $z \in \mathscr{D}$,
$$\Gamma(z) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}\right) + \int_1^{+\infty} t^{z-1}e^{-t}dt.$$
4. Montrer que la fonction $z \longmapsto \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n}$ est définie sur la partie $\mathbb{C}\backslash\{0, -1, -2, ...\}$ du plan complexe et qu'elle y est continue.
La formule précédente permet de prolonger la fonction Γ à $\mathbb{C}\backslash\{0, -1, -2, ...\}$.

5. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout $z \in \mathscr{D}$,

$$\int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = \frac{n^z n!}{z(z+1)...(z+n)}.$$

(on pourra utiliser le changement de variable $u = \frac{t}{n}$, puis une intégration par parties).

6. En utilisant le théorème de convergence dominée, démontrer que, pour tout $z \in \mathscr{D}$:

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \int_0^n \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n t^{z-1} dt = \lim_{n\to\infty} \frac{n^z n!}{z(z+1)...(z+n)}.$$

(formule de Gauss).

Problème 1

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On notera p_k la probabilité de l'événement "$X = k$" :

$$p_k = P(X = k).$$

On appelle fonction génératrice f de X la fonction somme de la série entière

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} p_k x^k.$$

Première partie

1. Calculer la fonction génératrice de la variable aléatoire X dans chacun des cas suivants en précisant à chaque fois le domaine de définition.

a) X est une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n, p.

b) X est variable aléatoire suivant une loi de Poisson de paramètre λ notée $P(\lambda)$.

c) X est variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p notée $G(p)$.

2. Montrer que la série $\sum_{k\in\mathbb{N}} p_k x^k$ converge pour tout $x \in [-1, 1]$. Que vaut $f(1)$?

3. On pose $q_k = P(X > k)$, $k \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} q_k x^k$ converge pour tout $x \in]-1, 1[$.

b) Montrer que pour tout $x \in]-1,1[$,

$$g(x)(1-x) = 1 - f(x),$$

où

$$g(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k x^k.$$

4. **a)** Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$, on pose $Z = X + Y$ et on note f (resp. g, h) la fonction génératrice de X (resp. Y, Z).
Montrer que, pour tout $x \in [-1,1]$, $f(x)g(x) = h(x)$.

b) Retrouver ainsi la fonction génératrice d'une variable aléatoire suivant une loi binomiale de paramètres n, p.

c) Montrer que si X et Y suivent des lois de Poisson de paramètres λ et μ, alors leur somme Z suit aussi une loi de Poisson. Quel est son paramètre ?

Deuxième partie

1. Une fourmi pond un nombre aléatoire N d'œufs. Soit f la fonction génératrice de la variable aléatoire $\mathbb{N}$. On suppose que ses descendants se produisent de façon indépendante et suivant la même loi, on appelle X_n la variable aléatoire représentant la population de fourmis nées à la n-ième génération.

a) Exprimer la probabilité $p_{i,j} = P(X_{n+1} = j / X_n = i)$ a l'aide de la fonction f.

b) Calculer cette probabilité lorsque N suit une loi de Poisson de paramètre λ.

2. On répète de façon indépendantes des expériences de Bernoulli de paramètre p. On s'intéresse a la loi X_k donnant le nombre d'échecs avant le k-ième succès, on note Y_j la loi donnant le nombre d'échecs entre les $j-1$ et j-ième succès. '

a) Quelle est la loi suivie par Y ?

b) Exprimer X_k en fonction des Y_j.

c) Montrer que $P(X = r) = \complement_{k+r-1}^{r} p^k q^r$.

Problème 2

Les deux parties de ce problème peuvent être traitées de façon indépendantes.

Partie A

1. **a)** Soit $n \in \mathbb{N}$, montrer qu'il existe un polynôme P_n tel que pour tout $t \in]0, \frac{\pi}{2}[$,

$$P_n(\text{cotan}^2 t) = \frac{\sin(2n+1)t}{\sin^{2n+1} t}.$$

b) Calculer la somme des racines de P_n.

c) Montrer que $\text{cotan}^2 t \leq \dfrac{1}{t^2} \leq 1 + \text{cotan}^2 t$ et en déduire que

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \ (\zeta \text{ la fonction de Riemann})$$

2. On considère la fonction f définie sur $[0;\ +\infty[$ par

$$f\,:\, x \longmapsto \begin{cases} \dfrac{x}{e^x - 1} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue sur $[0;\ +\infty[$ et que $\forall x \in [0;\ +\infty[,\ 0 < f(x) \leq 1$.

b) Montrer que f est intégrable sur $[0, +\infty[$ et que

$$\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Partie B

Soient $k \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathbb{R}$. On considère la variable aléatoire T qui donne, en jours, le délai entre la commande et la livraison d'un colis dans une société de vente par correspondance et on suppose qu'une densité de probabilité est la fonction g définie par :

$$g\,:\, t \longmapsto \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ Ate^{-kt} & \text{si } t \geq 0 \end{cases}$$

1. Déterminer la valeur de A en fonction de k. Dans la suite du problème, A prendra cette valeur.

2. Dans cette question, on prend : $k = 2$.

a) Étudier la fonction g et établir son tableau de variations. Vous préciserez les coordonnées du maximum et vous donnerez une équation des demi-tangentes au point d'abscisse $t = 0$.

b) Tracer la courbe représentative de g.

c) Quelle est la probabilité qu'un colis soit livré en moins de trois jours ?

d) Quelle est la probabilité qu'un colis soit livré en plus de deux jours, sachant qu'il l'est en moins de cinq jours ?

3. Dans cette question, k est un entier naturel non nul quelconque.

a) Déterminer les réels α et β tels que la fonction $h\,:\ t \mapsto (\alpha t + \beta)e^{-kt}$ soit une primitive de g sur $\mathbb{R}^+$. En déduire l'existence et la valeur de l'espérance de la variable aléatoire T.

b) Déterminer de même l'espérance de la variable aléatoire T^2. En déduire l'existence et la valeur de la variance de la variable aléatoire T.

FIN DE L'ÉPREUVE